Devoir surveillé 6 :
Suites, Probabilité, Distribution binomiale, Fonctions

Soyez très vigilant quant à votre rédaction, elle comptera lourdement

Exercice 1
Les questions suivantes sont indépendantes.

1) Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = -12$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n + 56$. Calculer u_{42}.
2) (v_n) est une suite géométrique de raison q strictement positive telle que $v_4 = -480$ et $v_6 = -1920$. Déterminer q, v_0 et v_9.
3) Soit (w_n) la suite définie pour tout entier naturel n, $w_n = 16 \times 0{,}5^n - 1$
   a. Calculer les cinq premiers termes de w_n.
   b. Etudier la monotonie (les variations) de (w_n).

Exercice 2 (5 points)
Une chaîne de production d'une usine fabrique des vêtements pour nourrissons. Une étude statistique a montré que :

- 12% des vêtements fabriqués ont un défaut dans la couleur,
- parmi les vêtements ayant un défaut dans la couleur, 20% ont un défaut dans la forme,
- parmi les vêtements n'ayant pas de défaut dans la couleur, 8% présentent un défaut dans la forme.

On appelle : C l'événement «le vêtement présente un défaut dans la couleur»
$\bar{C}$ l'événement contraire
F l'événement «le vêtement présente un défaut dans la forme»
$\bar{F}$ l'événement contraire.

Un employé choisit un vêtement au hasard, dans un lot de vêtements fabriqués et conformes à l'étude statistique ci-dessus.

1) Traduire les données de l'énoncée à l'aide d'un arbre pondéré.
2) (a) Calculer la probabilité que le vêtement choisi ait un défaut dans la couleur et un défaut dans la forme.
   (b) Calculer la probabilité que le vêtement choisi ait un défaut dans la forme.
3) Le directeur de l'usine affirme que 92% des vêtements fabriqués ne présentent aucun défaut. Cette affirmation est-elle correcte? Expliquer.
4) Les employés de l'usine sont autorisés à acheter des vêtements à tarif préférentiel. L'un d'entre eux choisit au hasard trois vêtements. Le nombre de vêtements fabriqués est suffisamment grand pour considérer que les trois choix sont indépendants.
   Quelle est la probabilité pour qu'aucun de ces trois vêtements choisis ne présente de défaut? Le résultat sera arrondi à 10^{-3}.

Exercice 3
L'arracheur de dents arrache les dents de ses patients au hasard. Les clients ont une dent malade parmi les trente-deux qu'ils possèdent avant l'intervention des tenailles du praticien.

1) On considère les dix premiers clients : calculer la probabilité pour qu'aucun de ces dix patients n'y laisse la dent malade.
2) On considère les dix premiers clients : calculer la probabilité pour qu'au moins un de ces clients y laisse la dent malade.
3) Combien doit-il traiter de personnes pour extraire au moins une dent malade avec une probabilité supérieure à 0,6 ?

Exercice 4
Soit $f(x) = \frac{2x^2+x-2}{x-1}$ une fonction définie sur $D_f = \mathbb{R} - \{1\}$

1) Dériver f
2) Faire le tableau de variation
3) Donner les coordonnées des deux points correspondant aux extremums locaux.
4) Donner l'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 3.

Devoir surveillé 6 : Suites, Probabilité, Distribution binomiale, Fonctions

Exercice 1

Les questions suivantes sont indépendantes.

1) Soit $(\mathrm{u_n})$ la suite définie par $\mathrm{u_0} = -12$ et pour tout entier naturel n, $\mathrm{u_{n+1}} = \mathrm{u_n} + 56$.
   La suite est arithmétique de raison 56, donc $\mathrm{u_{42}} = \mathrm{u_0} + 42r = -12 + 42 \times 56 = 2340$.
2) $(\mathrm{v_n})$ est une suite géométrique de raison q strictement positive telle que $\mathrm{v_4} = -480$ et $\mathrm{v_6} = -1920$.
   $\mathrm{v_6} = \mathrm{v_4}q^2$ donc $q^2 = \frac{-1920}{-480} = 4$, donc q= 2 ou -2 or la raison est positive donc q=2 $v_4 = v_0 q^4$ donc $v_0 = \frac{v_4}{2^4} = -30$ et donc $v_9 = v_0 q^9 = -15360$.
3) Soit $(\mathrm{w_n})$ la suite définie pour tout entier naturel n, $\mathrm{w_n} = 16 \times 0{,}5^{\mathrm{n}} - 1$
4) $\mathrm{w_0} = 15$, $\mathrm{w_1} = 7$, $\mathrm{w_2} = 3$, $w_3 = 1$, $w_4 = 0$, $\mathrm{w_5} = -0{,}5$.
5) $(\mathrm{w_n})$ semble décroissante, $\mathrm{w_{n+1}} - \mathrm{w_n} = 16 \times 0{,}5^{\mathrm{n+1}} - 16 \times 0{,}5^{\mathrm{n}} = 16 \times 0{,}5^{\mathrm{n}}(0{,}5 - 1) = -16 \times 0{,}5^{\mathrm{n+1}}$.
   Cette différence étant toujours négative la suite sera donc décroissante

Exercice 2 (5 points)

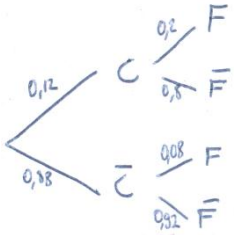
Une chaîne de production d'une usine fabrique des vêtements pour nourrissons. Une étude statistique a montré que :

- 12% des vêtements fabriqués ont un défaut dans la couleur,
- parmi les vêtements ayant un défaut dans la couleur, 20% ont un défaut dans la forme,
- parmi les vêtements n'ayant pas de défaut dans la couleur, 8% présentent un défaut dans la forme.

On appelle : C l'événement «le vêtement présente un défaut dans la couleur» $\bar{C}$ l'événement contraire
F l'événement «le vêtement présente un défaut dans la forme» $\bar{\mathrm{F}}$ l'événement contraire.

Un employé choisit un vêtement au hasard, dans un lot de vêtements fabriqués et conformes à l'étude statistique ci-dessus.

1) Traduire les données de l'énoncée à l'aide d'un arbre pondéré.



2) (a) $P(F \cap C) = \frac{12}{100} \times \frac{20}{100} = \frac{2{,}4}{100}$, la probabilité que le vêtement choisi ait un défaut dans la couleur et un défaut dans la forme est de 2,4%.
   (b) $P(F) = P(F \cap C) + P(F \cap \bar{C}) = \frac{2{,}4}{100} + \frac{88}{100} \times \frac{8}{100} = \frac{9{,}44}{100}$ ainsi la probabilité que le vêtement choisi ait un défaut dans la forme est de 9,44%.
3) Le directeur de l'usine affirme que 92% des vêtements fabriqués ne présentent aucun défaut. Cette affirmation est-elle correcte? Expliquer.
   $P(\text{aucun defaut}) = P(\bar{F} \cap \bar{C}) = \frac{88}{100} \times \frac{92}{100} = \frac{80{,}96}{100}$ donc la probabilité est de 80,96% et non de 92% comme annoncé
4) Les employés de l'usine sont autorisés à acheter des vêtements à tarif préférentiel. L'un d'entre eux choisit au hasard trois vêtements. Le nombre de vêtements fabriqués est suffisamment grand pour considérer que les trois choix sont indépendants.
   Quelle est la probabilité pour qu'aucun de ces trois vêtements choisis ne présente de défaut? Le résultat sera arrondi à 10^{-3}.$P(aucun\ des\ trois\ vêtements\ n'a\ de\ défaut) = \left(\frac{80{,}96}{100}\right)^3 \approx 53{,}065\%$

Exercice 3

L'arracheur de dents arrache les dents de ses patients au hasard. Les clients ont une dent malade parmi les trente-deux qu'ils possèdent avant l'intervention des tenailles du praticien.

1) On considère les dix premiers clients : calculer la probabilité pour qu'aucun de ces dix patients n'y laisse la dent malade. Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de client avec la bonne dent arrachée. On a à faire à une répétition indépendante à l'identique d'une expérience à deux issues , dont la probabilité de victoire est de $\frac{1}{32}$. X suit donc une loi binomiale de paramètres 10 et $\frac{1}{32}$.
   $P(X = 0) = \left(\frac{31}{32}\right)^{10} \approx 0{,}728$
2) On considère les dix premiers clients : calculer la probabilité pour qu'au moins un de ces clients y laisse la dent malade.
   $P(X > 0) = P(\overline{X = 0}) = 1 - P(X = 0) = 1 - \left(\frac{31}{32}\right)^{10} \approx 0{,}272$

3) Combien doit-il traiter de personnes pour extraire au moins une dent malade avec une probabilité supérieure à 0,6 ?
Il faut que la probabilité d'extraire aucune dent malade soit inférieure à 0,4. Avec un patient elle est de $\frac{31}{32} = 0{,}96875$, avec deux elle sera de $\left(\frac{31}{32}\right)^2 \approx 0{,}938$, etc , on a $\left(\frac{31}{32}\right)^{28} > 0{,}4$ et $\left(\frac{31}{32}\right)^{29} < 0{,}4$ donc il faut traiter au moins 29 personnes.

Exercice 4

Soit $f(x) = \frac{2x^2+x-2}{x-1}$ une fonction définie sur $D_f = \mathbb{R} - \{1\}$

1) Dériver f : $f'(x) = \frac{(4x+1)(x-1)-(2x^2+x-2)1}{(x-1)^2} = \frac{4x^2-3x-1-2x^2-x+2}{(x-1)^2} = \frac{2x^2-4x+1}{(x-1)^2}$
2) Signe de $2x^2 - 4x + 1$, $\Delta = 16 - 8 = 8$ et donc $x_1 = \frac{4-2\sqrt{2}}{4} = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $x_2 = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$

x		x_1		1		x_2	
$2x^2-4x+1$	+	0	-		-	0	+
$(x-1)^2$	+		+	0	+		+
f'(x)	+	0	-	||	-	0	+
f(x)	↗	M	↘		↘	m	↗

3) Donner les coordonnées des deux points correspondant aux extremums locaux.
$M = f(x_1) = -2\sqrt{2} + 5$ et $m = f(x_2) = 2\sqrt{2} + 5$ donc les extrémums ont pour coordonnées : $\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}; -2\sqrt{2} + 5\right)$ et $\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}; 2\sqrt{2} + 5\right)$
4) Donner l'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 3.
$f(3) = \frac{2\times3^2+3-2}{3-1} = \frac{19}{2}$ $f'(3) = \frac{2\times3^2-4\times3+1}{(3-1)^2} = \frac{7}{4}$
$y = \frac{7}{4}(x-3) + \frac{19}{2}$ $\qquad$ $y = \frac{7}{4}x + \frac{17}{4}$