Exercices sur les polynômes du second degré
Corrections

Exercice 1

$f(x) = 9x^2 - 1 = (3x)^2 - 1^2 = (3x-1)(3x+1)$
$g(x) = 4x^2 - 4x + 1 = (2x)^2 - 2(2x)1 + 1 = (2x-1)^2$
$h(x) = 2x^2 + 2\sqrt{2}x + 1 = \left(\sqrt{2}x\right)^2 + 2\left(\sqrt{2}x\right)1 + 1^2 = \left(\left(\sqrt{2}x\right)+1\right)^2$
$i(x) = x^4 + 10x^2 + 25 = (x^2)^2 + 2x^2 5 + 5^2 = (x^2+5)^2$

Exercice 2

$f(x) = 1x^2 + bx + c$
$\begin{cases} f(0) = 1 \\ f(2) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1(0)^2 + b(0) + c & = 1 \\ 1(2)^2 + b(2) + c & = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c & = 1 \\ 4 + 2b + c & = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c & = 1 \\ 2b & = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c & = 1 \\ b & = -2 \end{cases}$
Ainsi $f(x) = 1x^2 - 2x + 1$

Exercice 1. Factoriser les expressions suivantes.

$f(x) = 9x^2 - 1 \qquad g(x) = 4x^2 - 4x + 1 \qquad h(x) = 2x^2 + 2\sqrt{2}x + 1 \qquad i(x) = x^4 + 10x^2 + 25.$

Exercice 2. Soit f une fonction polynôme du second degré dont le coefficient dominant est 1 et telle que $f(0) = f(2) = 1$. Déterminer l'expression développée de f

Exercice 3. Écrire les trinômes suivants sous forme canonique.

$f(x) = x^2 + 2x + 3 \qquad g(x) = x^2 + x + 1 \qquad h(x) = 3x^2 + x - 2 \qquad i(x) = 5x^2 - 7x + 1$

Exercice 3

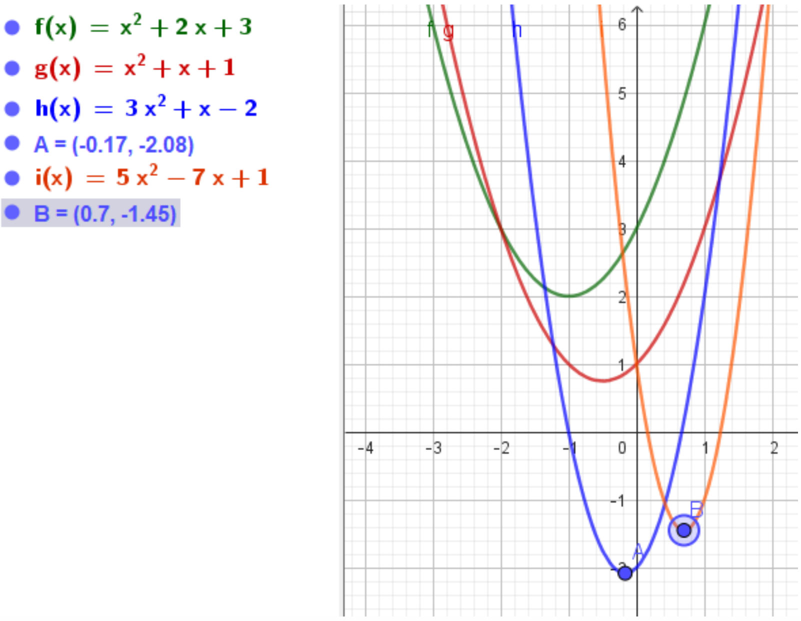
$\boldsymbol{f(x) = x^2 + 2x + 3}$ Donc $f(x) = a\,x^2 + bx + c$ avec $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$
Et donc $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$ avec $\alpha = -\frac{b}{2a} = -\frac{2}{2} = -1$ et $\beta = f(\alpha) = (-1)^2 + 2(-1) + 3 = 2$
Ainsi $f(x) = 1\left(x - (-1)\right)^2 + 2$

$\boldsymbol{g(x) = x^2 + x + 1}$ Donc $g(x) = a\,x^2 + bx + c$ avec $a = 1$, $b = 1$, $c = 1$
Et donc $g(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$ avec $\alpha = -\frac{b}{2a} = -\frac{1}{2}$ et $\beta = g(\alpha) = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right) + 1 = 0{,}75$
Ainsi $g(x) = 1\left(x - \left(-\frac{1}{2}\right)\right)^2 + 0{,}75$

$\boldsymbol{h(x) = 3x^2 + x - 2}$ Donc $h(x) = a\,x^2 + bx + c$ avec $a = 3$, $b = 1$, $c = -2$
Et donc $h(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$
avec $\alpha = -\frac{b}{2a} = -\frac{1}{6}$ et $\beta = h\left(-\frac{1}{6}\right) = 3\left(-\frac{1}{6}\right)^2 + \left(-\frac{1}{6}\right) - 2 = \frac{1}{12} - \frac{1}{6} - 2 = \frac{1}{12} - \frac{2}{12} - \frac{24}{12} = -\frac{25}{12}$
Ainsi $h(x) = 3\left(x - \left(-\frac{1}{6}\right)\right)^2 + \left(-\frac{25}{12}\right)$

$\boldsymbol{i(x) = 5x^2 - 7x + 1}$ Donc $i(x) = a\,x^2 + bx + c$ avec $a = 5$, $b = -7$, $c = 1$
Et donc $i(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$

avec $\alpha = -\frac{b}{2a} = -\frac{-7}{2\times 5} = 0{,}7$ et $\beta = i(\alpha) = 5(0{,}7)^2 - 7(0{,}7) + 1 = -1{,}45$
Ainsi $i(x) = 5(x - 0{,}7)^2 - 1{,}45$



Exercice 4. Soit $f : x \mapsto 3x^2 + x + 2$. En utilisant la forme canonique, montrer que, pour tout réel x, $f(x) > 0$.

Exercice 4

La fonction $f: x \to 3x^2 + x + 2$ est de la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a = 3, b = 1$ et $c = 2$

Ainsi $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$ avec

$\alpha = -\frac{b}{2a} = -\frac{1}{6}$ et $\beta = f\left(-\frac{1}{6}\right) = 3\left(-\frac{1}{6}\right)^2 + \left(-\frac{1}{6}\right) + 2 = \frac{1}{12} - \frac{1}{6} - 2 = \frac{1}{12} - \frac{2}{12} + \frac{24}{12} = \frac{23}{12}$

Ainsi $f(x) = 3\left(x - \left(-\frac{1}{6}\right)\right)^2 + \frac{23}{12}$

On sait que $\left(x - \left(-\frac{1}{6}\right)\right)^2 \geq 0$ et donc $3\left(x - \left(-\frac{1}{6}\right)\right)^2 \geq 3 \times 0$

et donc $3\left(x - \left(-\frac{1}{6}\right)\right)^2 + \frac{23}{12} \geq \frac{23}{12}$ or $\frac{23}{12} > 0$

et donc $3\left(x - \left(-\frac{1}{6}\right)\right)^2 + \frac{23}{12} > 0$

Exercice 5. Considérons la fonction $f : x \mapsto x^2 - 4x + 3$.

1. Écrire f sous forme canonique.
2. En déduire une forme factorisée de f.
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = 0$.

Exercice 5

1) La fonction $f: x \to x^2 - 4x + 3$ est de la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a = 1, b = -4$ et $c = 3$

Ainsi $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$ avec

$\alpha = -\frac{b}{2a} = -\frac{-4}{2} = 2$ et $\beta = f(2) = 1(2)^2 - 4(2) + 3 = -1$

Ainsi $f(x) = (x-2)^2 + (-1)$

2) $f(x) = (x-2)^2 - 1^2 = [(x-2)-1][(x-2)+1] = [x-3][x-1]$
3) $f(x) = 0 \Leftrightarrow [x-3][x-1] = 0 \Leftrightarrow x-3 = 0$ ou $x-1 = 0 \Leftrightarrow x = 3$ ou $x = 1$ $\quad S = \{1; 3\}$

Exercice 6. Résoudre les équations suivantes par la méthode qui vous semble la plus courte.

$(E_1): 4x^2-9=0 \quad (E_2): 2(x-1)(x+2)=0 \quad (E_3): x-3x^2=0 \quad (E_4): x^2+6x+9=0$

$(E_5): x^2-x-6=0 \quad (E_6): 2x^2+x-3=0 \quad (E_7): 2x^2+x+3=0 \quad (E_8): -x^2+2x+1=0$

Exercice 6

$(E_1): 4x^2 - 9 = 0 \quad \Leftrightarrow (2x)^2 - 3^2 = 0 \quad \Leftrightarrow [2x-3][2x+3] = 0$
$\Leftrightarrow 2x - 3 = 0$ ou $2x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$ ou $x = -\frac{3}{2}$

$$S = \left\{\frac{3}{2}; -\frac{3}{2}\right\}$$

$(E_2): 2(x-1)(x+2) = 0 \Leftrightarrow 2 = 0$ ou $(x-1) = 0$ ou $(x+2) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ou $x = -2$

$$S = \{-2; 1\}$$

$(E_3): x - 3x^2 = 0 \quad \Leftrightarrow x(1-3x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $1 - 3x = 0 \quad \Leftrightarrow x = 0$ ou $1 = 3x$
$\Leftrightarrow x = 0$ ou $\frac{1}{3} = x$

$$S = \left\{0; \frac{1}{3}\right\}$$

$(E_4): x^2 + 6x + 9 = 0 \quad \Leftrightarrow x^2 + 2 \times x \times 3 + 3^2 = 0 \Leftrightarrow (x+3)^2 = 0 \Leftrightarrow x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = -3$

$$S = \{-3\}$$

$(E_5): x^2 - x - 6 = 0$ on reconnait $ax^2 + bx + c = 0$ avec $a = 1$, $b = -1$ et $c = -6$
$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-6) = 25 \qquad >0$
Il y aura donc deux solutions :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-1)-\sqrt{25}}{2\times1} = \frac{1-5}{2} = -2 \text{ et } x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-1)+\sqrt{25}}{2\times1} = \frac{1+5}{2} = 3$$

$$S = \{-2; 3\}$$

$(E_6): 2x^2 + x - 3 = 0$ on reconnait $ax^2 + bx + c = 0$ avec $a = 2$, $b = 1$ et $c = -3$
$\Delta = b^2 - 4ac = (1)^2 - 4 \times 2 \times (-3) = 25 \qquad >0$
Il y aura donc deux solutions :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1-\sqrt{25}}{2\times2} = \frac{-1-5}{4} = -\frac{3}{2} \text{ et } x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1-\sqrt{25}}{2\times2} = \frac{-1+5}{4} = 1$$

$$S = \left\{-\frac{3}{2}; 1\right\}$$

$(E_7): 2x^2 + x + 3 = 0$ on reconnait $ax^2 + bx + c = 0$ avec $a = 2$, $b = 1$ et $c = 3$
$\Delta = b^2 - 4ac = (1)^2 - 4 \times 2 \times (3) = -23 \qquad <0$
Il y aura donc aucune solution : $\quad S = \emptyset$

(E_8): $-x^2+2x+1=0$ on reconnait $ax^2+bx+c=0$ avec $a=-1$, $b=2$ et $c=1$
$\Delta = b^2-4ac=(2)^2-4\times(-1)\times 1=8$ >0
Il y aura donc deux solutions :

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-2-\sqrt{8}}{2\times(-1)}=\frac{-2-2\sqrt{2}}{-2}=\frac{-2(1+\sqrt{2})}{-2\times 1}=1+\sqrt{2}$$

$$\text{et } x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-2+\sqrt{8}}{2\times(-1)}=\frac{-2+2\sqrt{2}}{-2}=\frac{2(-1+\sqrt{2})}{2\times(-1)}=\frac{-1+\sqrt{2}}{-1}=1-\sqrt{2}$$

$$S=\{1-\sqrt{2};1+\sqrt{2}\}$$

Exercice 7. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

$$(E_1)\ x^2+2\sqrt{2}x-3=0 \qquad (E_2): -x^2+x+1=3x-7$$

$$(E_3): (x-2)(-3x^2+19x-6)=0 \qquad (E_4): x^2-(1+\sqrt{2})x+\sqrt{2}=0.$$

Exercice 7

(E_1) : $x^2+2\sqrt{2}x-3=0$

Je reconnais $ax^2+bx+c=0$ avec $a=1$, $b=2\sqrt{2}$ et $c=-3$

On a donc $\Delta = b^2-4ac=\left(2\sqrt{2}\right)^2-4\times 1\times(-3)=8+12=20$
$\Delta>0$ donc on aura deux racines :

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-2\sqrt{2}-\sqrt{20}}{2\times 1}=\frac{-2\sqrt{2}-2\sqrt{5}}{2}=-\sqrt{2}-\sqrt{5}$$

$$\text{et } x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-2\sqrt{2}+\sqrt{20}}{2\times 1}=\frac{-2\sqrt{2}+2\sqrt{5}}{2}=-\sqrt{2}+\sqrt{5}$$

$$S=\{-\sqrt{2}-\sqrt{5};-\sqrt{2}+\sqrt{5}\}$$

(E_2) : $-x^2+x+1=0$

Je reconnais $ax^2+bx+c=0$ avec $a=-1$, $b=1$ et $c=1$

On a donc $\Delta = b^2-4ac=1^2-4\times(-1)\times 1=5$
$\Delta>0$ donc on aura deux racines :

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-1-\sqrt{5}}{2\times 1} \text{ et } x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-1+\sqrt{5}}{2\times 1} \qquad S=\left\{\frac{-1-\sqrt{5}}{2};\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right\}$$

(E_3): $(x-2)(-3x^2+19x-6)=0$
Ainsi $x-2=0$ ou $-3x^2+19x-6=0$
Concentrons-nous sur la deuxième équation :
On reconnait $ax^2+bx+c=0$ avec $a=-3$, $b=19$ et $c=-6$
$\Delta = b^2-4ac=19^2-4(-3)(-6)=361-72=289$
$\Delta>0$ donc on aura deux racines :

$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-19-\sqrt{289}}{2\times(-3)} = \frac{-19-17}{-6} = \frac{-36}{-6} = 6$

et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-19+\sqrt{289}}{2\times(-3)} = \frac{-19+17}{-6} = \frac{-2}{-6} = \frac{1}{3}$ $\qquad S = \left\{\frac{1}{3}; 6\right\}$

$(E_1) : \ x^2 - (1+\sqrt{2})x + \sqrt{2} = 0$

Je reconnais $ax^2 + bx + c = 0$ avec $a = 1$, $b = -(1+\sqrt{2})$ et $c = \sqrt{2}$

On a donc $\Delta = b^2 - 4ac = \left(-(1+\sqrt{2})\right)^2 - 4\times 1 \times \sqrt{2} = 1 + 2\sqrt{2} + 2 - 4\sqrt{2} = 1 - 2\sqrt{2} + 2$

$$= (1-\sqrt{2})^2$$

$\Delta > 0$ donc on aura deux racines :

$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{(1+\sqrt{2})-\sqrt{(1-\sqrt{2})^2}}{2\times 1} = \frac{(1+\sqrt{2})-\left(-(1-\sqrt{2})\right)}{2} = \frac{2}{2} = 1$

et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{(1+\sqrt{2})+\sqrt{(1-\sqrt{2})^2}}{2\times 1} = \frac{(1+\sqrt{2})+\left(-(1-\sqrt{2})\right)}{2} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$

$$S = \{1; \sqrt{2}\}$$

Exercice 8

(E_1): $\frac{x}{x^2+1} = \frac{1}{2}$ comme $x^2 \geq 0$ on aura $x^2 + 1 > 0$ et donc je peux multiplier les deux membres par cette expression

$(E_1) \Leftrightarrow 2x = 1(x^2+1) \Leftrightarrow 0 = x^2 - 2x + 1 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

(E_2): $\frac{3x^2-8x+16}{x-4} = 2x$

$x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 4$ donc dans la mesure où $x \neq 4$ j'ai le droit de multiplier par $x - 4$ les deux membres. Ainsi sur $D_e = \mathbb{R} - \{4\}$ on aura

$$(E_2) \Leftrightarrow \frac{3x^2-8x+16}{x-4} = 2x$$

$\Leftrightarrow \frac{3x^2-8x+16}{x-4}(x-4) = 2x(x-4)$

$\Leftrightarrow 3x^2 - 8x + 16 = 2x^2 - 8x$

$\Leftrightarrow x^2 + 16 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 = -16$ or un carré ne peut être négatif donc $S = \emptyset$

$$(E_3): x + \frac{1}{x} = 3$$

Valeur interdite :

Donc sur $D_e = \mathbb{R} - \{0\} = \mathbb{R}^*$ on aura

$$(E_3) \Leftrightarrow x + \frac{1}{x} = 3$$

$$\Leftrightarrow \left(x+\frac{1}{x}\right)x = 3x$$
$$\Leftrightarrow x^2+1 = 3x$$

$$\Leftrightarrow x^2-3x+1=0$$

Je reconnais $ax^2+bx+c=0$ avec $a=1$, $b=-3$ et $c=1$

On a donc $\Delta = b^2-4ac = (-3)^2-4\times1\times1 = 5$

Or $\Delta > 0$

Donc $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3-\sqrt{5}}{2\times1} = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3+\sqrt{5}}{2\times1} = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$

Ces deux valeurs sont acceptables car elles sont non nulles ainsi $S=\left\{\frac{3-\sqrt{5}}{2};\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right\}$

$$(E_4): 4x^4-13x^2+3=0$$

$\Leftrightarrow 4(x^2)^2-13(x^2)+3=0$

Je pose $X=x^2$ et ainsi $(E_4) \Leftrightarrow 4X^2-13X+3=0$

Je reconnais $aX^2+bX+c=0$ avec $a=4$, $b=-13$ et $c=3$

On a donc $\Delta = b^2-4ac = (-13)^2-4\times4\times3 = 121$

Or $\Delta > 0$

Donc $X_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{13-\sqrt{121}}{2\times4} = \frac{13-11}{8} = \frac{1}{4}$ et $X_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{13+\sqrt{121}}{2\times4} = \frac{13+11}{8} = 3$

donc $(E_4) \Leftrightarrow X=\frac{1}{4}$ ou $X=3$ Or $X=x^2$ donc $(E_4) \Leftrightarrow x^2=\frac{1}{4}$ ou $x^2=3$

$\Leftrightarrow x=\sqrt{\frac{1}{4}}$ ou $x=-\sqrt{\frac{1}{4}}$ ou $x=\sqrt{3}$ ou $x=-\sqrt{3}$ $\qquad S=\left\{\frac{1}{2};-\frac{1}{2};\sqrt{3};-\sqrt{3}\right\}$

$$\boldsymbol{(E_5): -2x+9\sqrt{x}-4=0}$$

Version avec changement de variable

$(E_5) \Leftrightarrow -2\sqrt{x}^2+9\sqrt{x}-4=0$

Pour tout x positif ou nul, on peut poser $X=\sqrt{x}$ et ainsi :$(E_5) \Leftrightarrow -2X^2+9X-4=0$

Je reconnais $aX^2+bX+c=0$ avec $a=-2$, $b=9$ et $c=-4$

$\Delta = 9^2-4\times(-2)\times(-4) = 81-32 = 49$

$\Delta > 0$ donc on a deux solutions :

$X_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-9-\sqrt{49}}{2\times(-2)} = \frac{-9-7}{-4} = 4$ et $X_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-9+\sqrt{49}}{2\times(-2)} = \frac{-9+7}{-4} = \frac{1}{2}$

Ainsi $(E_5) \Leftrightarrow X=4$ ou $X=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \sqrt{x}=4$ ou $\sqrt{x}=\frac{1}{2} \Leftrightarrow x=16$ ou $x=\frac{1}{4}$

On a donc $S=\left\{\frac{1}{2};16\right\}$

Version 2

(E_5):⇔$9\sqrt{x} = 2x + 4$

=> $\left(9\sqrt{x}\right)^2 = (2x + 4)^2$

⇔ $81x = 4x^2 + 16x + 16$

⇔ $0 = 4x^2 + 16x - 81x + 16$

⇔ $0 = 4x^2 - 65x + 16$

Je reconnais $ax^2 + bx + c = 0$ avec $a = 4$, $b = -65$ et $c = 16$

$$\Delta = (-65)^2 - 4 \times 4 \times 16 = 3969$$

$\Delta > 0$ donc on a deux solutions :

$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{65-\sqrt{3969}}{2\times4} = \frac{65-63}{8} = \frac{1}{4}$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{65+\sqrt{3969}}{2\times4} = \frac{65+63}{8} = 16$

Ainsi $0 = 4x^2 + 16x - 81x + 16$ a pour solutions $\frac{1}{4}$ et 16.

Mais qu'en est-il de (E_5) qui n'est pas équivalente à l'équation de la ligne précédente ?

Quand on a $x\ solution\ de\ (E)$ => $x\ solution\ de\ (E')$, on peut se demander comment l'ensemble des solutions est impactée.

Si on appelle S et S' les ensemble des solutions de deux équations alors on sait que si x est dans S alors il est aussi dans S' donc $S \subset S'$ par contre comme la réciproque n'est pas vraie alors des éléments de S' peuvent ne pas être dans S.

Par rapport à notre problème, l'ensemble des solutions de $0 = 4x^2 - 65x + 16$ étant potentiellement plus vaste que celui de (E_5) il nous faut donc nous assurer que chacune des solutions trouvées fonctionne pour (E_5).

Avec $x = \frac{1}{4}$,

$-2x + 9\sqrt{x} - 4 = -2\frac{1}{4} + 9\sqrt{\frac{1}{4}} - 4 = -\frac{1}{2} + \frac{9}{2} - 4 = 0$ donc $\frac{1}{4}$ bien solution de (E_5).

Avec $x = 16$,

$-2x + 9\sqrt{x} - 4 = -2 \times 16 + 9\sqrt{16} - 4 = -32 + 36 - 4 = 0$ donc 16 bien solution de (E_5).

On a donc $S = \left\{\frac{1}{2}; 16\right\}$

Exemple bonus

On a $x - 5 = 0$

⇔$x = 5$ au lieu de s'arrêter là, bien content d'avoir terminé notre exercice, continuons

=> $x^2 = 5^2$

⇔ $x^2 - 5^2 = 0$

⇔ $(x - 5)(x + 5) = 0$

⇔ $x - 5 = 0$ ou $x + 5 = 0$

⇔ $x = 5$ ou $x = -5$ Là on pourrait être tenté de se dire qu'il y a deux solutions mais la chaine des équivalences est rompue à la deuxième étape donc on a :

$x - 5 = 0$=> $x = 5$ ou $x = -5$ (une simple implication, pas une équivalence)

Pour conclure, je suis dans l'obligation de tester toutes les solutions obtenues et voir celles qui vont correspondre à l'équation initiale.

Avec $x = 5$ on aura : $x - 5 = 5 - 5 = 0$ donc 5 est une bonne solution

Avec $x = -5$ on aura : $x - 5 = -5 - 5 = -10 \neq 0$ donc -5 n'est pas une solution valable

Ainsi $S = \{5\}$

$$(E_6): -\frac{1}{x^2} + \frac{6}{x} - 1 = 0$$

$(E_6) \Leftrightarrow -\left(\frac{1}{x}\right)^2 + 6\frac{1}{x} - 1 = 0$ ainsi pour tout x non nul on peut poser $X = \frac{1}{x}$ et on aura alors
$(E_6) \Leftrightarrow -X^2 + 6X - 1 = 0$
Je reconnais $aX^2 + bX + c = 0$ avec $a = -1$, $b = 6$ et $c = -1$
$\Delta = 6^2 - 4 \times (-1) \times (-1) = 32$
$\Delta > 0$ donc on a deux solutions :
$X_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-6-\sqrt{32}}{2\times(-1)} = \frac{-6-4\sqrt{2}}{-2} = 3 + 2\sqrt{2}$ et $X_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-6+\sqrt{32}}{2\times(-1)} = \frac{-6+4\sqrt{2}}{-2} = 3 - 2\sqrt{2}$
Ainsi $(E_5) \Leftrightarrow \mathrm{X} = 3 + 2\sqrt{2}$ ou $X = 3 - 2\sqrt{2}$
$\Leftrightarrow \frac{1}{x} = 3 + 2\sqrt{2}$ ou $\frac{1}{x} = 3 - 2\sqrt{2}$
$\Leftrightarrow x = \frac{1}{3+2\sqrt{2}}$ ou $x = \frac{1}{3-2\sqrt{2}}$
$\Leftrightarrow x = \frac{1(3-2\sqrt{2})}{(3+2\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})}$ ou $x = \frac{1(3+2\sqrt{2})}{(3-2\sqrt{2})(3+2\sqrt{2})}$
$\Leftrightarrow x = \frac{1(3-2\sqrt{2})}{3^2-(2\sqrt{2})^2}$ ou $x = \frac{1(3+2\sqrt{2})}{9-8}$
$\Leftrightarrow x = 3 - 2\sqrt{2}$ ou $x = 3 + 2\sqrt{2}$
On a donc $S = \{3 - 2\sqrt{2}; 3 + 2\sqrt{2}\}$

$$\boldsymbol{(E_7): \sqrt{x+4} = 7 - 2x}$$

Domaine d'étude $D_e = [-4; +\infty[$
=>$\sqrt{x+4}^2 = (7-2x)^2$
$\Leftrightarrow x + 4 = 49 - 28x + 4x^2$
$\Leftrightarrow 0 = 45 - 29x + 4x^2$
Je reconnais $ax^2 + bx + c = 0$ avec $a = 4$, $b = -29$ et $c = 45$
$\Delta = (-29)^2 - 4 \times 4 \times 45 = 121$
$\Delta > 0$ donc on a deux solutions :
$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{29-\sqrt{121}}{2\times4} = \frac{29-11}{8} = 2{,}25$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{29+\sqrt{121}}{2\times4} = \frac{29+11}{8} = 5$
Vu qu'on a qu'une implication simple on va tester les deux solutions
Avec $x = 2{,}25$
$\sqrt{x+4} = \sqrt{2{,}25+4} = \sqrt{6{,}25} = 2{,}5$ et $7 - 2x = 7 - 2 \times 2{,}25 = 2{,}5$ l'égalité est vérifiée, la solution est acceptable.
Avec $x = 5$
$\sqrt{x+4} = \sqrt{5+4} = \sqrt{9} = 3$ et $7 - 2 \times 5 = 7 - 2 \times 5 = -3$ l'égalité n'est pas vérifiée, la solution est rejetée.
Ainsi $S = \{2{,}25\}$

Exercice 8. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

$(E_1) : \dfrac{x}{x^2+1} = \dfrac{1}{2}$ $\quad (E_2) : \dfrac{3x^2-8x+16}{x-4} = 2x$ $\quad (E_3) : x+\dfrac{1}{x} = 3$ $\quad (E_4) : 4x^4-13x^2+3 = 0$

$(E_5) : -2x+9\sqrt{x}-4 = 0$ $\quad (E_6) : -\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{6}{x}-1 = 0$ $\quad (E_7) : \sqrt{x+4} = 7-2x$

$(E_8) : (x^2-5)^2+22(x^2-5)+121 = 0$ $\quad (E_9) : x^3-3x^2 = x$ $\quad (E_{10}) : mx^2-\sqrt{m}x+1 = 0$ où $m \in \mathbb{R}_+$

$$(E_8): (x^2-5)^2+22(x^2-5)+121 = 0$$

Posons $X = x^2-5$

On aura alors : $(E_8) \Leftrightarrow X^2+22X+121 = 0$

Je reconnais $aX^2+bX+c = 0$ avec $a = 1$, $b = 22$ et $c = 121$

$\Delta = 22^2-4\times 1\times 121 = 0$

$\Delta = 0$ donc on a une solution unique :

$X_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{-22}{2\times 1} = -11$

Ainsi $(E_5) \Leftrightarrow \mathrm{X} = -11 \Leftrightarrow x^2-5 = -11 \Leftrightarrow x^2 = -6$ comme s'est impossible $S = \emptyset$

$$(E_9): x^3-3x^2 = x$$

$\Leftrightarrow x^3-3x^2-x = 0 \Leftrightarrow x(x^2-3x-1) = 0$

Etape intermédiaire : résolution de $x^2-3x-1 = 0$

Je reconnais $ax^2+bx+c = 0$ avec $a = 1$, $b = -3$ et $c = -1$

$\Delta = (-3)^2-4\times 1\times(-1) = 13$

$\Delta > 0$ donc on a deux solutions :

$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3-\sqrt{13}}{2\times 1}$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3+\sqrt{13}}{2}$

Ainsi $(E_5) \Leftrightarrow x(x^2-3x-1) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = \frac{3-\sqrt{13}}{2}$ ou $x = \frac{3+\sqrt{13}}{2}$

$$S = \left\{0; \frac{3-\sqrt{13}}{2}; \frac{3+\sqrt{13}}{2}\right\}$$

$$(E_{10}): mx^2-\sqrt{m}x+1 = 0$$

On propose $m \geq 0$

Or si m est nul alors l'équation n'est pas du second degré, qui plus est, elle équivaut à 1=0 ce qui n'a pas de solution.

Concentrons-nous sur les autres cas possibles, en prenant $m > 0$

Pour tout x réel on peut poser $X = \sqrt{m}x$ et ainsi

$(E_{10}) \Leftrightarrow X^2-X+1 = 0$

Je reconnais $aX^2+bX+c = 0$ avec $a = 1$, $b = -1$ et $c = 1$

$\Delta = (-1)^2-4\times 1\times 1 = -3$

$\Delta < 0$ donc on n'a pas de solution