Polynômes du second degré

Corrections des exercices de la seconde fiche

Exercice 1

Si -2 est racine de f, alors $f(-2) = 0 \Leftrightarrow -(-2)^2 + 4(-2) + c = 0 \Leftrightarrow -4 - 8 + c = 0 \Leftrightarrow c = 12$

Je pose $x_1 = -2$ la première racine de f, Pour trouver l'autre racine j'utilise la somme S des racines.

$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \Leftrightarrow -2 + x_2 = \frac{-4}{-1} \Leftrightarrow x_2 = 4 + 2 \Leftrightarrow x_2 = 6$

Ainsi $f: x \to -x^2 + 4x + 12$ a pour racines -2 et 6.

Exercice 2

$f: x \to 2x^2 + 5x - 7$ a pour racine évidente $x_1 = 1$, et donc $P = \frac{c}{a} \Leftrightarrow 1x_2 = \frac{-7}{2}$

Ainsi $f(x) = 2(x-1)\left(x - \frac{-7}{2}\right)$

$g: x \to x^2 - 2x - 1$

Je reconnais $ax^2 + bx + c = 0$ avec $a = 1$, $b = -2$ et $c = -1$
$\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times (-1) = 8$
$\Delta > 0$ donc on a deux solutions :
$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2-\sqrt{8}}{2\times 1} = \frac{2-2\sqrt{2}}{2} = 1 - \sqrt{2}$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2+\sqrt{8}}{2\times 1} = \frac{2+2\sqrt{2}}{2} = 1 + \sqrt{2}$
Ainsi $g(x) = 1\left(x - (1-\sqrt{2})\right)\left(x - (1+\sqrt{2})\right) = (x - 1 + \sqrt{2})(x - 1 - \sqrt{2})$

$h: x \to x^2 - x + 2$

Je reconnais $ax^2 + bx + c = 0$ avec $a = 1$, $b = -1$ et $c = 2$
$\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times 2 = -7$
$\Delta < 0$ donc pas de racine et pas de factorisation possible.

$i: x \to x^2 - 7x + 12$
Je reconnais $ax^2 + bx + c = 0$ avec $a = 1$, $b = -7$ et $c = 12$
$\Delta = (-7)^2 - 4 \times 1 \times 12 = 1$
$\Delta > 0$ donc on a deux solutions :
$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{7-\sqrt{1}}{2\times 1} = \frac{6}{2} = 3$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{7+\sqrt{1}}{2\times 1} = \frac{8}{2} = 4$
Ainsi $i(x) = 1(x-3)(x-4)$

Exercice 3

Le choix des lettres est super problématique, donc pour se faciliter la vie je vais les renommer d'une manière qui soit conforme à notre cours :

L'énoncé sera alors :

Déterminer x_1 et x_2 tels que $x_1 + x_2 = -16$ et $x_1x_2 = 63$

Soit f la fonction trinôme $f : x \to 1(x - x_1)(x - x_2)$ d'après le cours elle aura pour version développée $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $\begin{cases} a = 1 \\ -\frac{b}{a} = x_1 + x_2 \\ \frac{c}{a} = x_1x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ -b = -16 \\ c = 63 \end{cases}$ ainsi $f(x) = x^2 + 16x + 63$

Je reconnais $ax^2 + bx + c = 0$ avec $a = 1$, $b = 16$ et $c = 63$
$\Delta = 16^2 - 4 \times 1 \times 63 = 256 - 252 = 4$
$\Delta > 0$ donc on a deux solutions :
$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-16-\sqrt{4}}{2\times1} = \frac{-16-2}{2} = -9$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-16+\sqrt{4}}{2\times1} = \frac{-16+2}{2} = -7$
Les valeurs recherchées sont donc -9 et -7 avec ma reformulation de l'énoncé comme sans. Si on revient à l'énoncé original on aura comme couple de solution possible $a = -9$ et $b = -7$ (pour avoir l'autre on permutera les valeurs).

Exercice 4

Soit l la largeur du rectangle et L sa longueur.

On aura alors : Périmètre = $2l + 2L = 24$ et Aire= $lL = 25$

Ainsi on cherche les solutions de $\begin{cases} l + L = 12 \\ lL = 25 \end{cases}$, là on aura le choix entre deux approches :

Version vue en classe

Soit f la fonction trinôme

$f : x \to 1(x - l)(x - L)$

alors on sait que sa version développée vérifie :

$f(x) = ax^2 + bc + c$ avec $\begin{cases} a = 1 \\ -\frac{b}{a} = l + L \\ \frac{c}{a} = lL \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ -b = 12 \\ c = 25 \end{cases} \Leftrightarrow f(x) = x^2 - 12x + 25$

Version alternative

(S) $\begin{cases} l + L = 12 \\ lL = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} l = 12 - L \\ lL = 25 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} l = 12 - L \\ (12 - L)L = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} l = 12 - L \\ 12L - L^2 = 25 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} l = 12 - L \\ 0 = L^2 - 12L + 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} l = 12 - L \\ 0 = L^2 - 12L + 25 \end{cases}$

Je reconnais $ax^2+bx+c=0$ avec $a=1$, $b=-12$ et $c=25$
$\Delta=(-12)^2-4\times1\times25=44$
$\Delta>0$ donc on a deux solutions :
$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{12-\sqrt{44}}{2\times1}=\frac{12-2\sqrt{11}}{2}=6-\sqrt{11}$ et $x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=6+\sqrt{11}$
Ainsi $l=6-\sqrt{11}$ et $L=6+\sqrt{11}$

Exercice 5

Comme à l'exercice 3, je fais une reformulation

Je pose $x_1=2-\sqrt{3}$ et $x_2=2+\sqrt{3}$

$x_1+x_2=4$ et $x_1x_2=(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})=2^2-\sqrt{3}^2=4-3=1$

Soit f la fonction trinôme $f\colon x\to1(x-x_1)(x-x_2)$ alors on sait que sa version développée vérifie :

$f(x)=ax^2+bc+c$ avec $\begin{cases} a=1 \\ -\frac{b}{a}=x_1+x_2 \\ \frac{c}{a}=x_1x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ -b=4 \\ c=1 \end{cases} \Leftrightarrow f(x)=x^2-4x+1$

Exercice 7

La fonction $f\colon x\to x^2-5x+6$ a une racine évidente : 2

Je pose $x_1=2$ la première racine de f, pour trouver l'autre racine j'utilise la somme S des racines.

$x_1+x_2=-\frac{b}{a}\Leftrightarrow 2+x_2=-\frac{-5}{1}\Leftrightarrow x_2=5-2\Leftrightarrow x_2=3$

Ainsi $f\colon x\to x^2-5x+6$ a pour racines 2 et 3.

La fonction $g\colon x\to x^2+3x+2$ a pour racine évidente $x_1=-1$

Pour trouver l'autre racine j'utilise le produit P des racines.

$x_1x_2=\frac{c}{a}\Leftrightarrow -1x_2=\frac{2}{1}\Leftrightarrow x_2=-2$

Ainsi $g\colon x\to x^2+3x+2$ a pour racines -1 et -2

La fonction $h\colon x\to 2x^2+2x-4$ a pour racine évidente $x_1=1$

Pour trouver l'autre racine j'utilise le produit P des racines :

$x_1x_2=\frac{c}{a}\Leftrightarrow 1x_2=\frac{-4}{2}\Leftrightarrow x_2=-2$ Ainsi h a pour racines 1 et -2

La fonction $i: x \to -x^2 + 2x + 3$ a pour racine $x_1 = -1$

Pour trouver l'autre racine j'utilise la somme S des racines :

$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \Leftrightarrow -1 + x_2 = -\frac{2}{-1} \Leftrightarrow x_2 = 2 + 1 \Leftrightarrow x_2 = 3$

Ainsi $i: x \to -x^2 + 2x + 3$ a pour racines -1 et 3.

Exercice 9

1. La fonction est du second degré quand $(m-1)$ est non nul. Valeurs problématiques : celles qui vérifient $m - 1 = 0 \Leftrightarrow m = 1$ donc $D = \mathbb{R} - \{1\}$
2. Avec $m \in D$, $f(1) = (m-1)1^2 + 2m1 + 1 - 3m = m - 1 + 2m + 1 - 3m = 0$. Donc $x_1 = 1$ est racine de f pour tout m de D.
3. Pour trouver l'autre racine j'utilise la somme S des racines :
   $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \Leftrightarrow 1 + x_2 = -\frac{2m}{m-1} \Leftrightarrow x_2 = \frac{2m}{1-m} - \frac{1}{1} \Leftrightarrow x_2 = \frac{2m}{1-m} - \frac{1-m}{1-m} \Leftrightarrow x_2 = \frac{2m-1+m}{1-m}$
   Ainsi f a pour racines 1 et $\frac{3m-1}{1-m}$

Exercice 13

On pose $x = BM$, on a alors en utilisant pythagore respectivement dans les triangles BMA et MDC :
$AM^2 = AB^2 + BM^2 = 4^2 + x^2 = 16 + x^2$

et $MD^2 = MC^2 + CD^2 = (10 - x)^2 + 4^2 = 116 - 20x + x^2$

dans AMD rectangle en M $\Leftrightarrow AD^2 = AM^2 + MD^2 \Leftrightarrow 10^2 = (16 + x^2) + (116 - 20x + x^2)$

$\Leftrightarrow 0 = 2x^2 - 20x + 32$

Je reconnais $ax^2 + bx + c = 0$ avec $a = 2$, $b = -20$ et $c = 32$
$\Delta = (-20)^2 - 4 \times 2 \times 32 = 400 - 256 = 144$
$\Delta > 0$ donc on a deux solutions :
$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{20-\sqrt{144}}{2\times2} = \frac{20-12}{4} = 2$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{20+\sqrt{144}}{2\times2} = \frac{20+12}{4} = 8$
M est donc à 2cm de B ou à 8cm de ce point. (à 2cm de C)