

Nom & Prénom :

Devoir surveillé : Suites arithmétiques et géométriques

Exercice 1

On considère la suite arithmétique (U_n) , définie sur \mathbb{N} , telle que $U_{12} = 52$ et $U_{23} = 107$.

1. Calculer la raison r de la suite.
2. Calculer le terme initial U_0 .
3. Calculer U_{55} .
4. Déterminer le sens de variations de la suite.
5. Soit (S_n) la somme des termes de la suite (U_n) dont les rangs vont de 0 à n :
 $S_n = U_0 + U_1 + \dots + U_n$
 - a) Calculer S_{55}
 - b) Calculer $U_{13} + U_8 + \dots + U_{23}$

Exercice 2

On considère la suite géométrique (V_n) , définie sur \mathbb{N} , de raison $q = \frac{1}{2}$ et telle que $V_1 = 480$.

1. Calculer V_2 , V_3 et V_4
2. Pour tout entier naturel n , donner l'expression de V_n en fonction de n .
3. Déterminer le sens de variations de la suite.

Exercice 3

Un magasin multimédia vend des ordinateurs et des tablettes numériques à des entreprises. En 2017, il a vendu 250 000 ordinateurs et 54 000 tablettes. Il estime que les ventes d'ordinateurs diminuent de 6% chaque année, alors que les ventes de tablettes progressent en moyenne de 8% d'une année sur l'autre. Pour tout entier naturel n , on note respectivement a_n et b_n les ventes d'ordinateurs et de tablettes en $2017 + n$.

1. Calculer le nombre d'ordinateurs et de tablettes vendus en 2018, puis en 2019.
2. Exprimer, pour tout entier naturel n , a_{n+1} en fonction de a_n , puis b_{n+1} en fonction de b_n .
3. En l'expression des deux suites en fonction de n .
4. Calculer le nombre d'ordinateurs et de tablettes vendus aux entreprises en 2025.
5. Calculer, pour cette estimation (arrondir à l'unité) :
 - (a) le nombre d'ordinateurs qui seront vendus de 2017 à 2030.
 - (b) le nombre de tablettes qui seront vendues sur la même période.
6. Question bonus :
 - (a) Écrire et programmer un algorithme qui permet de savoir en quelle année les ventes de tablettes dépasseront celles des ordinateurs.
 - (b) Exécuter l'algorithme et donner l'année obtenue.

Correction : Suites arithmétiques et géométriques

Exercice 1 (5 points) : Niveau N1-N2

On considère la suite arithmétique (U_n) , définie sur \mathbb{N} , telle que $U_{12} = 52$ et $U_{23} = 107$.

1. $U_{23} = U_0 + 23r$ et $U_{12} = U_0 + 12r$ en faisant une soustraction membre à membre on obtient :

$$U_{23} - U_{12} = 23r - 12r \Leftrightarrow 107 - 52 = 11r \Leftrightarrow \frac{55}{11} = r. \text{ La raison vaut donc } r = 5.$$

2. $U_{12} = U_0 + 12r \Leftrightarrow 52 = U_0 + 12 \times 5 \Leftrightarrow 52 - 60 = U_0 \Leftrightarrow -8 = U_0$.

3. $U_{55} = U_0 + 55r = -8 + 55 \times 5 = 267$.

4. (U_n) est une suite arithmétique de raison $r = 5 > 0$ donc elle est croissante.

5. Soit (S_n) la somme des termes de la suite (U_n) dont les rangs vont de 0 à n : $S_n = U_0 + U_1 + \dots + U_n$

a) (U_n) est arithmétique donc $S_{55} = \frac{(55+1)(U_0+U_{55})}{2} = \frac{56(-8+267)}{2} = 7252$

b) $U_{13} + U_{14} + \dots + U_{23} = \frac{(nbr\ elements)(premier+dernier)}{2} = \frac{(23-13+1)(U_{13}+U_{23})}{2} = \frac{11(52+5+107)}{2} = 902$

$U_{13} + \dots + U_{23} = S_{23} - S_{12} = \frac{(23+1)(U_0+U_{23})}{2} - \frac{(12+1)(U_0+U_{12})}{2} = \frac{24(-8+107)}{2} - \frac{13(-8+52)}{2} = 1188 - 286 = 902$

Exercice 2 (5 points) : Niveau N1-N2

On considère la suite géométrique (V_n) , définie sur \mathbb{N} , de raison $q = \frac{1}{2}$ et telle que $V_1 = 480$.

1. Calculer $V_2 = V_1 \frac{1}{2} = 240$, $V_3 = V_2 \frac{1}{2} = 120$ et $V_4 = V_3 \frac{1}{2} = 60$

2. $V_n = V_1 q^{n-1} = 480 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

3. Le premier terme V_1 est positif, et $0 < q < 1$ donc la suite est décroissante.

Exercice 3 (10 points) : Niveau N1-N2-N3

Un magasin multimédia vend des ordinateurs et des tablettes numériques à des entreprises. En 2017, il a vendu 250 000 ordinateurs et 54 000 tablettes. Il estime que les ventes d'ordinateurs diminuent de 6% chaque année, alors que les ventes de tablettes progressent en moyenne de 8% d'une année sur l'autre. Pour tout entier naturel n , on note respectivement a_n et b_n les ventes d'ordinateurs et de tablettes en 2017 + n .

1. Calculer le nombre d'ordinateurs et de tablettes vendus en 2018, puis en 2019.

En 2018 : le nombre d'ordinateur sera $250000 \left(1 - \frac{6}{100}\right) = 235\ 000$, le nombre de tablette sera :

$$54000 \left(1 + \frac{8}{100}\right) = 58\ 320$$

En 2019 : le nombre d'ordinateur sera $235\ 000 \left(1 - \frac{6}{100}\right) = 220\ 900$, le nombre de tablette sera :

$$58\ 320 \left(1 + \frac{8}{100}\right) = 62\ 985,6$$

2. Exprimer, pour tout entier naturel n , $a_{n+1} = 0,94 a_n$ et $b_{n+1} = 1,08 b_n$.

3. Pour tout n on aura $a_n = 250\ 000 \times 0,94^n$ et $b_n = 54\ 000 \times 1,08^n$

4. En 2025, correspond au rang $2025 - 2017 = 8$.

Le nombre d'ordinateur sera : $a_8 = 250\ 000 \times 0,94^8 \approx 152\ 392,2346$

Le nombre de tablette sera : $b_8 = 54\ 000 \times 1,08^8 \approx 99\ 950,23136$

5. Calculer, pour cette estimation (arrondir à l'unité) :

$$(a) a_0 + a_1 + \dots + a_{13} = a_0 \frac{1-0,94^{14}}{1-0,94} = 250\ 000 \frac{1-0,94^{14}}{0,06} \approx 2\ 414\ 486,708$$

$$(b) b_0 + b_1 + \dots + b_{13} = b_0 \frac{1-1,08^{14}}{1-1,08} = 54\ 000 \frac{1-1,08^{14}}{-0,08} \approx 1\ 307\ 605,696$$

6. Question bonus :

a=250000

b=54000

n=0

while a>b:

a=a*(1-6/100)

b=b*(1+8/100)

n=n+1

print("l'année est : ",2017+n)

la réponse est 2029