Devoir surveillé n°6 : Suites

Exercice 1 (3 points)

Dresser le tableau de variation de $f(x) = \frac{x^2-3x-2}{x-1}$ définie sur $\mathbb{R} - \{1\}$

Exercice 2 (3 points)

La suite (u_n) est arithmétique de raison r. On sait que $u_{50} = 406$ et $u_{100} = 806$.
1. Calculer la raison r et u_0.
2. Calculer la somme $S = u_{50} + u_{51} + \ldots + u_{100}$.

Exercice 3 (5 points)

Une entreprise décide de verser à ses ingénieurs une prime annuelle de 400€.
Pour ne pas se dévaluer, il est prévu que chaque année la prime augmente de 5% par rapport à l'année précédente (ce qui revient à multiplier la prime par 1,05).
On note (u_n) la suite des primes avec $u_1 = 400$.
1. Calculer u_2 puis u_3 (c'est-à-dire la prime versée par l'entreprise la 2ème année et la 3ème année)
2. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n. En déduire la nature de la suite (u_n).
Un ingénieur compte rester 20 ans dans cette entreprise à partir du moment où est versée la prime.
3. Calculer la prime qu'il touchera la 20ème année (c'est-à-dire u_{20})
4. Soit S des primes touchées sur les 20 années ,c'est-à-dire $S = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_{20}$
   a) Restitution organisée de connaissance : prouver que $S = \frac{u_1(1{,}05^{20}-1)}{1{,}05-1}$
   b) Donner S.

Exercice 4 (5 points)

On considère les deux suites (u_n)et (v_n)définies, pour tout $\in \mathbb{N}$, par : $u_n = 6 \times 2^n + 7n - 5$ et
$v_n = -6 \times 2^n + 7n - 5$
1. Soit (w_n) la suite définie par $w_n = u_n + v_n$. Démontrer que (w_n) est une suite arithmétique dont vous préciserez les caractéristiques.
2. Soit (t_n) la suite définie par $t_n = u_n - v_n$. Démontrer que (t_n) est une suite géométrique dont vous préciserez les caractéristiques.
3. Démontrer que : $u_n = \frac{1}{2}(w_n + t_n)$
4. Exprimer la somme $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n$ en fonction des termes de (w_n) et (t_n) puis en fonction de n.

Exercice 5 (6 points)

On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \frac{2}{1+u_n} \end{cases}$ pour tout entier naturel.
1. Calculer u_1 et u_2. La suite (u_n) est-elle arithmétique ? Géométrique ?
   Bonus : démontrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq 3$
2. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par : $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 2}$
   a) Calculer v_0, v_1 et v_2. Conjecturer de manière détaillée la nature de la suite (v_n).
   b) Prouver votre conjecture
      Coup de pouce : dans un premier temps traduire au brouillon votre conjecture sous forme d'égalité, dans un deuxième temps exprimer v_{n+1} en fonction de u_{n+1} puis en fonction de u_n, vérifier l'égalité écrite au brouillon, conclure.
   c) Exprimer v_n en fonction de n.
   d) Exprimer u_n en fonction de v_n puis de n. Que vaut u_{10} ?

Devoir surveillé n°6 : Suites

Exercice 1 (3 points)

Dresser le tableau de variation de $f(x) = \frac{x^2-3x-2}{x-1}$ définie sur $\mathbb{R} - \{1\}$

Exercice 2 (3 points)

La suite (u_n) est arithmétique de raison r. On sait que $u_{50} = 406$ et $u_{100} = 806$.
1. Calculer la raison r et u_0.
2. Calculer la somme $S = u_{50} + u_{51} + \ldots + u_{100}$.

Exercice 3 (5 points)

Une entreprise décide de verser à ses ingénieurs une prime annuelle de 400€.
Pour ne pas se dévaluer, il est prévu que chaque année la prime augmente de 5% par rapport à l'année précédente (ce qui revient à multiplier la prime par 1,05).
On note (u_n) la suite des primes avec $u_1 = 400$.
1. Calculer u_2 puis u_3 (c'est-à-dire la prime versée par l'entreprise la 2ème année et la 3ème année)
2. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n. En déduire la nature de la suite (u_n).
Un ingénieur compte rester 20 ans dans cette entreprise à partir du moment où est versée la prime.
3. Calculer la prime qu'il touchera la 20ème année (c'est-à-dire u_{20})
4. Soit S des primes touchées sur les 20 années ,c'est-à-dire $S = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_{20}$
    a) Restitution organisée de connaissance : prouver que $S = \frac{u_1(1{,}05^{20}-1)}{1{,}05-1}$
    b) Donner S.

Exercice 4 (5 points)

On considère les deux suites (u_n)et (v_n)définies, pour tout $\in \mathbb{N}$, par : $u_n = 6 \times 2^n + 7n - 5$ et $v_n = -6 \times 2^n + 7n - 5$
1. Soit (w_n) la suite définie par $w_n = u_n + v_n$. Démontrer que (w_n) est une suite arithmétique dont vous préciserez les caractéristiques.
2. Soit (t_n) la suite définie par $t_n = u_n - v_n$. Démontrer que (t_n) est une suite géométrique dont vous préciserez les caractéristiques.
3. Démontrer que : $u_n = \frac{1}{2}(w_n + t_n)$
4. Exprimer la somme $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n$en fonction des termes de (w_n) et (t_n) puis en fonction de n.

Exercice 5 (6 points)

On considère la suite (u_n) définie par :$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \frac{2}{1+u_n} \end{cases}$ pour tout entier naturel.
1. Calculer u_1 et u_2. La suite (u_n) est-elle arithmétique ? Géométrique ?
    Bonus : démontrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq 3$
2. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par : $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 2}$
    a) Calculer v_0, v_1 et v_2. Conjecturer de manière détaillée la nature de la suite (v_n).
    b) Prouver votre conjecture
        Coup de pouce : dans un premier temps traduire au brouillon votre conjecture sous forme d'égalité, dans un deuxième temps exprimer v_{n+1} en fonction de u_{n+1} puis en fonction de u_n, vérifier l'égalité écrite au brouillon, conclure.
    c) Exprimer v_n en fonction de n.
    d) Exprimer u_n en fonction de v_n puis de n. Que vaut u_{10} ?

Devoir surveillé n°6 : Suites

Exercice 1 (3 points)

$f(x) = \frac{x^2-3x-2}{x-1}$

$f'(x) = \frac{(2x-3)(x-1)-(x^2-3x-2)}{(x-1)^2}$

$= \frac{2x^2-5x+3-(x^2-3x-2)}{(x-1)^2} = \frac{x^2-2x+5}{(x-1)^2}$

Résolution de $x^2 - 2x + 5 = 0$

$\Delta = 4 - 20 = -16$ donc $x^2 - 2x + 5$ est toujours positif

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$(x-1)^2$		+	0	+	
f'(x)		+	||	+	
f(x)		$\nearrow$	||	$\nearrow$	

Exercice 2 (5min)

La suite (u_n) est arithmétique de raison r. On sait que $u_{50} = 406$ et $u_{100} = 806$.

1. $\begin{cases} u_{50} = 406 \\ u_{100} = 806 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_0 + 50r = 406 \\ u_0 + 100r = 806 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_0 + 50r = 406 \\ 50r = 400 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_0 + 400 = 406 \\ r = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_0 = 6 \\ r = 8 \end{cases}$

2. $S = u_{50} + u_{51} + \ldots + u_{100} = \frac{(100-50+1)(u_{50}+u_{100})}{2} = \frac{51(406+806)}{2} = 30906.$

Exercice 3 (25min)

Une entreprise décide de verser à ses ingénieurs une prime annuelle de 400€.

Pour ne pas se dévaluer, il est prévu que chaque année la prime augmente de 5% par rapport à l'année précédente (ce qui revient à multiplier la prime par 1,05).

On note (u_n) la suite des primes avec $u_1 = 400$.

1. Calculer $u_2 = 400 \times 1{,}05 = 420$ puis $u_3 = 441$
2. Exprimer $u_{n+1} = 1{,}05u_n$, donc (u_n) est géométrique de raison 1,05.
3. (u_n) est géométrique donc $u_n = u_0q^n = u_1q^{n-1}$ donc ici $u_{20} = 400 \times 1{,}05^{19} \approx 1010{,}78$
4. $S = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_{20} = u_1 + u_1q^1 + u_1q^2 + \ldots + u_1q^{19}$

$qS = qu_1 + qu_2 + qu_3 + \ldots + qu_{20} = u_1q^1 + u_1q^2 + u_1q^3 + \ldots + u_1q^{20}$

$qS - S = u_1q^{20} - u_1 \Leftrightarrow S(q-1) = u_1(q^{20} - 1) \Leftrightarrow S = \frac{u_1(1-1{,}05^{20})}{1-1{,}05} \approx 13\,226{,}38$

Exercice 4 (15min)

On considère les deux suites (u_n)et (v_n)définies, pour tout $\in \mathbb{N}$, par : $u_n = 6 \times 2^n + 7n - 5$ et $v_n = -6 \times 2^n + 7n - 5$

1. $w_n = 6 \times 2^n + 7n - 5 - 6 \times 2^n + 7n - 5 = 14n - 10.$ Donc(w_n) est une suite arithmétique de raison 14 et de premier terme $w_0 = -10$
2. Soit (t_n) la suite définie par $t_n = 6 \times 2^n + 7n - 5 + 6 \times 2^n - 7n + 5 = 12 \times 2^n$. Donc (t_n) est une suite géométrique de raison 2 et de premier terme $t_0 = 12$.
3. Démontrer que : $\frac{1}{2}(w_n + t_n) = \frac{1}{2}(14n - 10 + 12 \times 2^n) = 7n - 5 + 6 \times 2^n = u_n$
4. Exprimer la somme $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n = \frac{1}{2}(w_0 + t_0) + \frac{1}{2}(w_1 + t_1) + \cdots + \frac{1}{2}(w_n + t_n) =$

$\frac{1}{2}(w_0 + w_1 + w_2 + \ldots + w_n) + \frac{1}{2}(t_0 + t_1 + t_2 + \ldots + t_n) = \frac{1}{2}\frac{(n+1)(w_0+w_n)}{2} + \frac{1}{2}\frac{t_0(2^{n+1}-1)}{2-1} =$

$\frac{(n+1)(-10+14n-10)}{4} + \frac{12(2^{n+1}-1)}{2} = \frac{(n+1)(-10+7n)+12(2^{n+1}-1)}{2}$

Exercice 5 (25 min)

On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \frac{2}{1+u_n} \end{cases}$ pour tout entier naturel.

1. Calculer $u_1 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ et $u_2 = \frac{2}{\frac{3}{2}} = \frac{4}{3}$.

$\frac{u_1}{u_0} = \frac{1}{6}$ et $\frac{u_3}{u_2} = \frac{8}{3}$ donc la suite n'est pas géométrique.

$u_1 - u_0 = -2{,}5$ et $u_2 - u_1 = \frac{4}{3} - \frac{1}{2} = \frac{5}{6}$ donc (u_n) n'est pas arithmétique.

Bonus : démontrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq 3$

Initialisation : $u_0 = 3$ donc pour $n = 0$ on a bien $0 \leq u_n \leq 3$

Hérédité : Soit k tel que $0 \leq u_k \leq 3$ donc $1 \leq u_k + 1 \leq 4$

Donc $\frac{1}{1} \geq \frac{1}{u_k+1} \geq \frac{1}{4}$ la fonction inverse étant décroissante sur [1 ;4] elle change l'ordre

Donc $2\frac{1}{4} \leq \frac{2}{u_k+1} \leq 2\frac{1}{1}$ donc $\frac{1}{2} \leq u_{k+1} \leq 2$ or $0 \leq \frac{1}{2}$ et $2 \leq 3$

Donc $0 \leq u_{k+1} \leq 3$

La propriété est donc bien héréditaire

Conclusion : ainsi on a bien $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq 3$

2. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par : $v_n = \frac{u_n-1}{u_n+2}$

a) Calculer $v_0 = \frac{2}{5}, v_1 = -\frac{\frac{1}{2}}{\frac{5}{2}} = -\frac{1}{5}$ et $v_2 = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{10}{3}} = \frac{1}{10}$. La suite (v_n)semble être géométrique de raison $\frac{-1}{2}$ et de premier terme $v_0 = \frac{2}{5}$.

b) $v_{n+1} = \frac{u_{n+1}-1}{u_{n+1}+2} = \frac{\frac{2}{1+u_n}-1}{\frac{2}{1+u_n}+2} = \frac{\frac{2}{1+u_n}-\frac{1+u_n}{1+u_n}}{\frac{2}{1+u_n}+\frac{2(1+u_n)}{1+u_n}} = \frac{\frac{1-u_n}{1+u_n}}{\frac{4+2u_n}{1+u_n}} = \frac{1-u_n}{4+2u_n} = -\frac{1}{2}\frac{u_n-1}{u_n+2} = -\frac{1}{2}v_n$ donc (v_n) est bien géométrique de raison $\frac{-1}{2}$

c) $v_n = \frac{2}{5}\left(\frac{-1}{2}\right)^n$.

d) $v_n = \frac{u_n-1}{u_n+2} \Leftrightarrow v_n(u_n + 2) = u_n - 1$ car vu que u_n est compris entre 0 et 3 $u_n + 2$ ne peut être nul.

$\Leftrightarrow u_n(v_n - 1) = -2v_n - 1 \Leftrightarrow u_n = \frac{-2v_n-1}{(v_n-1)}$ car on a trivialement $v_n < 1$

$\Leftrightarrow u_n = \frac{2v_n+1}{1-v_n} \Leftrightarrow u_n = \frac{2\frac{2}{5}\left(\frac{-1}{2}\right)^n+1}{1-\frac{2}{5}\left(\frac{-1}{2}\right)^n}$

$u_{10} = \frac{2\frac{2}{5}\left(\frac{-1}{2}\right)^{10}+1}{1-\frac{2}{5}\left(\frac{-1}{2}\right)^{10}} = \frac{854}{853} \approx 1{,}00117$