Devoir surveillé n°6 : Suites

Exercice 1 (3 points)

Dresser le tableau de variation de $f(x) = \frac{x^2-3x-2}{x-1}$ définie sur $\mathbb{R} - \{1\}$

Exercice 2 (3 points)

La suite (u_n) est arithmétique de raison r. On sait que $u_{50} = 406$ et $u_{100} = 806$.
1. Calculer la raison r et u_0.
2. Calculer la somme $S = u_{50} + u_{51} + \ldots + u_{100}$.

Exercice 3 (5 points)

Une entreprise décide de verser à ses ingénieurs une prime annuelle de 400€.
Pour ne pas se dévaluer, il est prévu que chaque année la prime augmente de 5% par rapport à l'année précédente (ce qui revient à multiplier la prime par 1,05).
On note (u_n) la suite des primes avec $u_1 = 400$.
1. Calculer u_2 puis u_3 (c'est-à-dire la prime versée par l'entreprise la 2ème année et la 3ème année)
2. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n. En déduire la nature de la suite (u_n).
Un ingénieur compte rester 20 ans dans cette entreprise à partir du moment où est versée la prime.
3. Calculer la prime qu'il touchera la 20ème année (c'est-à-dire u_{20})
4. Soit S des primes touchées sur les 20 années ,c'est-à-dire $S = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_{20}$
    a) Restitution organisée de connaissance : prouver que $S = \frac{u_1(1{,}05^{20}-1)}{1{,}05-1}$
    b) Donner S.

Exercice 4 (5 points)

On considère les deux suites (u_n)et (v_n)définies, pour tout $\in \mathbb{N}$, par : $u_n = 6 \times 2^n + 7n - 5$ et $v_n = -6 \times 2^n + 7n - 5$
1. Soit (w_n) la suite définie par $w_n = u_n + v_n$. Démontrer que (w_n) est une suite arithmétique dont vous préciserez les caractéristiques.
2. Soit (t_n) la suite définie par $t_n = u_n - v_n$. Démontrer que (t_n) est une suite géométrique dont vous préciserez les caractéristiques.
3. Démontrer que : $u_n = \frac{1}{2}(w_n + t_n)$
4. Exprimer la somme $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n$ en fonction des termes de (w_n) et (t_n) puis en fonction de n.

Exercice 5 (6 points)

On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \frac{2}{1+u_n} \end{cases}$ pour tout entier naturel.
1. Calculer u_1 et u_2. La suite (u_n) est-elle arithmétique ? Géométrique ?
    Bonus : démontrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq 3$
2. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par : $v_n = \frac{u_n-1}{u_n+2}$
    a) Calculer v_0, v_1 et v_2. Conjecturer de manière détaillée la nature de la suite (v_n).
    b) Prouver votre conjecture
        Coup de pouce : dans un premier temps traduire au brouillon votre conjecture sous forme d'égalité, dans un deuxième temps exprimer v_{n+1} en fonction de u_{n+1} puis en fonction de u_n, vérifier l'égalité écrite au brouillon, conclure.
    c) Exprimer v_n en fonction de n.
    d) Exprimer u_n en fonction de v_n puis de n. Que vaut u_{10} ?

Devoir surveillé n°6 : Suites

Exercice 1 (3 points)

Dresser le tableau de variation de $f(x) = \frac{x^2-3x-2}{x-1}$ définie sur $\mathbb{R} - \{1\}$

Exercice 2 (3 points)

La suite (u_n) est arithmétique de raison r. On sait que $u_{50} = 406$ et $u_{100} = 806$.
1. Calculer la raison r et u_0.
2. Calculer la somme $S = u_{50} + u_{51} + \ldots + u_{100}$.

Exercice 3 (5 points)

Une entreprise décide de verser à ses ingénieurs une prime annuelle de 400€.
Pour ne pas se dévaluer, il est prévu que chaque année la prime augmente de 5% par rapport à l'année précédente (ce qui revient à multiplier la prime par 1,05).
On note (u_n) la suite des primes avec $u_1 = 400$.
1. Calculer u_2 puis u_3 (c'est-à-dire la prime versée par l'entreprise la 2ème année et la 3ème année)
2. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n. En déduire la nature de la suite (u_n).

Un ingénieur compte rester 20 ans dans cette entreprise à partir du moment où est versée la prime.

3. Calculer la prime qu'il touchera la 20ème année (c'est-à-dire u_{20})
4. Soit S des primes touchées sur les 20 années ,c'est-à-dire $S = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_{20}$
   a) Restitution organisée de connaissance : prouver que $S = \frac{u_1(1{,}05^{20}-1)}{1{,}05-1}$
   b) Donner S.

Exercice 4 (5 points)

On considère les deux suites (u_n)et (v_n)définies, pour tout $\in \mathbb{N}$, par : $u_n = 6 \times 2^n + 7n - 5$ et $v_n = -6 \times 2^n + 7n - 5$
1. Soit (w_n) la suite définie par $w_n = u_n + v_n$. Démontrer que (w_n) est une suite arithmétique dont vous préciserez les caractéristiques.
2. Soit (t_n) la suite définie par $t_n = u_n - v_n$. Démontrer que (t_n) est une suite géométrique dont vous préciserez les caractéristiques.
3. Démontrer que : $u_n = \frac{1}{2}(w_n + t_n)$
4. Exprimer la somme $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n$en fonction des termes de (w_n) et (t_n) puis en fonction de n.

Exercice 5 (6 points)

On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \frac{2}{1+u_n} \end{cases}$ pour tout entier naturel.
1. Calculer u_1 et u_2. La suite (u_n) est-elle arithmétique ? Géométrique ?
   Bonus : démontrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq 3$
2. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par : $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 2}$
   a) Calculer v_0, v_1 et v_2. Conjecturer de manière détaillée la nature de la suite (v_n).
   b) Prouver votre conjecture
      Coup de pouce : dans un premier temps traduire au brouillon votre conjecture sous forme d'égalité, dans un deuxième temps exprimer v_{n+1} en fonction de u_{n+1} puis en fonction de u_n, vérifier l'égalité écrite au brouillon, conclure.
   c) Exprimer v_n en fonction de n.
   d) Exprimer u_n en fonction de v_n puis de n. Que vaut u_{10} ?