Suites

I. Définitions. Notations

Une suite numérique est une fonction de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{R}$.
Si une suite est représentée par la lettre u, on note u_n l'image de n, appelée aussi terme d'indice n.
La suite entière est représentée par(u_n).

1- Suite des valeurs d'une fonction.

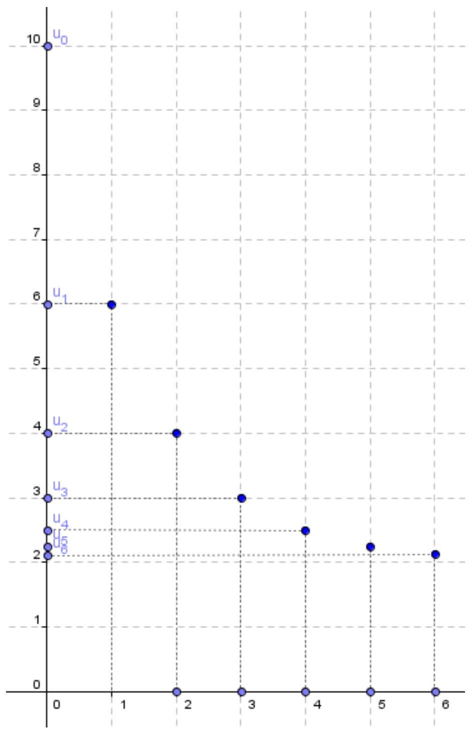
Soit f une fonction définie sur $[0;+\infty[$. On peut définir une suite (u_n) par $u_n = f(n)$.
Exemple
Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{x+2}{x+1}$. On considère la suite (u_n) définie par $u_n = f(n)$.
On a alors : $u_0 = \frac{0+2}{0+1} = 2$ $\quad u_1 = \frac{1+2}{1+1} = \frac{3}{2}$ $\quad u_2 = \frac{2+2}{2+1} = \frac{4}{3}$, etc …

2- Suite définie par récurrence

On définit une suite par récurrence en indiquant son premier terme et une méthode de calcul d'un terme en fonction du précédent.
Exemple
Soit g la fonction définie par$g(x) = \frac{x}{2} - 1$. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = g(u_n)$.
On a alors :$u_1 = g(u_0) = \frac{2}{2} - 1 = 0$ $\quad u_2 = g(u_1) = \frac{0}{2} - 1 = -1$
$u_3 = g(u_2) = -\frac{1}{2} - 1 = -\frac{3}{2}$ etc...
Remarque
On ne peut calculer un terme que si on connaît le précédent, mais de proche en proche on peut calculer tous les termes en partant du premier.

3- Représentation graphique de suites

Exemple : $\begin{cases} u_0 = 10 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1 \end{cases}$ graphique ci-contre :



4- Suites croissantes et décroissantes

Une suite (u_n) est strictement croissante si pour tout entier naturel n on a $u_n < u_{n+1}$.
Une suite (u_n) est strictement décroissante si pour tout entier naturel n on a $u_n > u_{n+1}$.
Une suite (u_n) est constante si pour tout entier naturel n on a $u_n = u_{n+1}$.

Pour comparer u_{n+1} et u_n on peut étudier le signe de leur différence ou, si tous les u_n sont strictement positifs, comparer leur quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1.

Exemple 1
Soit (u_n) la suite définie par $u_n = n^2 + n - 3$.
$u_{n+1} - u_n = \left((n+1)^2 + (n+1) - 3\right) - \left(n^2 + n - 3\right)$
$= n^2 + 2n + 1 + n + 1 - 3 - n^2 - n + 3$ $\qquad$ donc $u_{n+1} - u_n = 2n + 2 > 0$.
On en déduit que $u_n < u_{n+1}$, donc que (u_n) est strictement croissante.

Exemple 2
Soit (u_n) la suite définie par $u_n = 7\frac{2^n}{3^{2n+1}}$. Tous les termes de cette suite sont positifs.
$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{7\frac{2^{n+1}}{3^{2(n+1)+1}}}{7\frac{2^n}{3^{n}}} = \frac{2^{n+1}}{3^{2n+3}} \times \frac{3^{2n+1}}{2^n} = \frac{2}{3^2}$ or $\frac{2}{9} < 1$ on en déduit que $u_{n+1} < u_n$, la suite (u_n) est donc strictement décroissante.

II. Suites arithmétiques

Une suite (u_n) est arithmétique s'il existe un réel r tel que pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = u_n + r$.
Le nombre r est appelé raison de la suite arithmétique.

1- Sens de variation

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r. On a $u_{n+1} - u_n = r$.
On en déduit que :
- si $r > 0$, la suite (u_n) est strictement croissante.
- si $r < 0$, la suite (u_n) est strictement décroissante.
- si $r = 0$, la suite (u_n) est constante.

2- Expression de u_n en fonction de n

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r.
Pour tout entier naturel n, $\boldsymbol{u_n = u_0 + n \times r}$
Réciproquement, si f est la fonction affine définie par $f(x) = ax + b$, la suite (u_n) définie par $u_n = f(n)$ est une suite arithmétique de premier terme $u_0 = b$ et de raison a.

3- Somme de termes consécutifs (1S)

a) Pour tout entier naturel n : $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

b) Si (u_n) est une suite arithmétique : $u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n = \frac{(n+1)(u_0+u_n)}{2}$ et

$$u_p + u_{p+1} + \cdots u_{q-1} + u_q = \frac{(q-p+1)(u_p+u_q)}{2} = \frac{\boldsymbol{(nbre\ de\ termes)(premier+dernier\ termes)}}{\boldsymbol{2}}$$

Démonstration :

a) On pose $S_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1) + n$ donc $S_n = n + (n-1) + \cdots + 3 + 2 + 1$
en ajoutant membre à membre :
$2S_n = (n+1) + (n+1) + \cdots + (n+1)$ on a une somme de n facteurs tous égaux à $(n+1)$
Donc $2S_n = n(n+1)$ donc $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$

b) soit (u_n) une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0 donc $\forall n \in \mathbb{N}, \mathrm{u_n} = u_0 + n\,r$
soit $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1} + u_n$

donc $S_n = u_0 + (u_0 + r) + \cdots + (u_0 + (n-1)r) + (u_0 + n\,r)$
donc $S_n = (u_0 + n\,r) + (u_0 + (n-1)r) + \cdots + (u_0 + r) + u_0$
donc $2S_n = (u_0 + n\,r + u_0) + (u_0 + r + u_0 + (n-1)r) + \cdots + (u_0 + n\,r + u_0)$ par somme
donc $2S_n = (u_0 + n\,r + u_0) + (u_0 + n\,r + u_0) + \cdots + (u_0 + n\,r + u_0)$
donc $2S_n = (u_0 + u_n) + (u_0 + u_n) + \cdots + (u_0 + u_n)$ on a $n + 1$ termes identiques
donc $2S_n = (u_0 + u_n)(n+1)$
donc $S_n = \frac{(u_0+u_n)(n+1)}{2}$

La démonstration peut être généralisée pour prouver que $u_p + u_{p+1} + \cdots u_{q-1} + u_q = \frac{(q-p+1)(u_p+u_q)}{2}$

Exemple :

le salaire annuel d'un employé augmente de 500€ tous les ans, il commence la première année à 18 000 €
Donner la quantité d'argent gagné en 10 ans
Comme on ajoute 500€ euro pour passer du salaire d'une année à celui d'une autre on a bien affaire à une suite arithmétique définie par : $\begin{cases} u_0 = 18\,000 \\ u_{n+1} = u_n + 500 \end{cases}$
La somme attendue est $S = u_0 + u_1 + \cdots + u_9 = \frac{10(u_0+u_9)}{2} = \frac{10(18000+18000+500\times9)}{2} = 5(40500) = 202\,500$
Remarque : si la première année il a gagné u_0 alors la $10^{\text{ème}}$ année il aura gagné u_9

III. Suites géométriques

Une suite (u_n) est géométrique s'il existe un réel q tel que pour tout entier naturel n $\boldsymbol{u_{n+1} = q\,u_n}$.
Le nombre q est appelé raison de la suite géométrique.

1- Sens de variation

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q. On a $\frac{u_{n+1}}{u_n} = q$
Si u_0 et q sont strictement positifs, on en déduit que :
- si $q > 1$, la suite (u_n) est strictement croissante.
- si $q < 1$, la suite (u_n) est strictement décroissante.
- si $q = 1$, la suite (u_n) est constante.

2- Expression de u_n en fonction de n

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q. Pour tout entier naturel n, $\boldsymbol{u_n = u_0\, q^n}$.

3- Somme de termes consécutifs (1S)

a) Pour tout réel q différent de 1 et pour tout entier naturel n : $1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

b) Si (u_n) est une suite géométrique de raison q, $q \neq 1$, $u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n = \frac{u_0(1-q^{n+1})}{1-q}$

Démonstration

a) Posons $S_n = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n$ on a donc :

$qS_n = q + q^2 + \cdots + q^n + q^{n+1}$

Donc $S_n - qS_n = 1 \qquad - q^{n+1}$

Donc $S_n(1-q) = 1 - q^{n+1}$

Donc $S_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

b) Posons $S'_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n$

donc $S'_n = u_0 1 + u_0 q + u_0 q^2 + \cdots + u_0 q^n$

donc $qS'_n = u_0 q + u_0 q^2 + \cdots + u_0 q^n + u_0 q^{n+1}$

donc $S'_n - qS'_n = u_0 1 - u_0 q^{n+1}$

donc $S'_n(1-q) = u_0(1-q^{n+1})$

donc $S'_n = u_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ ou encore $S'_n = \frac{u_0 - u_0 q^{n+1}}{1-q} = \frac{u_0 - u_{n+1}}{1-q}$

Exemple : Le jeu d'échecs se joue sur un échiquier de 64 cases.
La légende dit que pour le remercier des plaisirs que lui procurait le jeu d'échecs, l'empereur Shiram promit à son inventeur Sissa le cadeau suivant : " Sur la première case du jeu, il déposerait 1 grain de riz, puis le double sur la deuxième case et ainsi de suite en doublant chaque fois le nombre de grains. "
Ça fait combien de grains de riz en tout ? Et si on peut estimer le poids d'un grain de riz à 0,06g, quelle masse de riz est ce que le roi dois donner à Sissa.
Si la première case est notée 0 et la dernière 63, la quantité de riz d'une case est calculable avec une suite géométrique $u_n = 2^n$, le nombre total de grains de riz sera : $u_0 + u_1 + \cdots + u_{63} = \frac{1(1-2^{64})}{1-2}$
Le poids sera donc : $0{,}06\frac{1(1-2^{64})}{1-2}$ ≈553 402 322 211 287 000 grammes ≈553 402 322 211 tonnes
Ce qui correspond a presque 1000 la quantité de riz produite annuellement sur le globe !!!!
La promesse a dû être dure à tenir !

IV. Limites de Suites (1S)

Propriété

On dit que (u_n) Une suite a pour limite a, siquel que soit l'écart ε il existe un rang n_0 à partir duquel les u_n sont à une distance inférieure à ε de a.

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |u_n - a| \leq \varepsilon$$

Exemple : $U_n = \frac{5n+1}{n}$ a pour limite 5 (à démontrer)

Propriété

On dit que (u_n) Une suite a pour limite $+\infty$ (ou $-\infty$), si elle ne peut être majorée (minorée), autrement dit si pour toute valeur A, il existe un rang n_0 à partir duquel les u_n sont supérieurs (inférieurs) à A. On dit que (u_n) diverge.

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, u_n \geq A$$

Exemple : $U_n = -n^2$ a pour limite $-\infty$ (à démontrer)