Géométrie plane

I. Colinéarité de deux vecteurs

Définition

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires veut dire qu'il existe un nombre réel λ tel que $\vec{u} = \lambda\vec{v}$ ou un nombre réel μ tel que $\vec{v} = \mu\vec{u}$.

Remarque :

le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur car le produit par 0 de n'importe quel vecteur est $\vec{0}$.
Deux vecteurs colinéaires non nuls ont la même direction, par contre ils n'auront pas nécessairement le même sens.

Propriété

Soit $\vec{u}(x; y)$ et $\vec{v}(x'; y')$deux vecteurs.
Ils sont colinéaires <u>si et seulement si</u> xy' – x'y = 0

Démonstration

⇨ Supposons que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient colinéaires,
Dans ce cas
soit il existe un nombre réel λ tel que $\vec{u} = \lambda\vec{v}$ et dans ce cas $x = \lambda x'$ et $y = \lambda y'$,
donc $xy' - x'y = \lambda x'y' - x'\lambda y' = 0$
soit il existe un nombre réel μ tel que $\vec{v} = \mu\vec{u}$ et dans ce cas $x' = \mu x$ et $y' = \mu y$,
donc $xy' - x'y = x\mu y - \mu xy = 0$
donc dans tous les cas on aura bien $xy' - x'y = 0$

⇦ Supposons que $xy' - x'y = 0$
On cherche à déterminer le coefficient λ, à priori on l'obtient en effectuant $\frac{y}{y'}$ ou $\frac{x}{x'}$,mais attention il faut que le dénominateur soit non nul.
Si $x' \neq 0$ on pose $\lambda = \frac{x}{x'}$ et donc $xy' - x'y = 0 \Leftrightarrow \lambda x'y' - x'y = 0 \Leftrightarrow \lambda y' = y$ donc on a bien $\vec{u} = \lambda\vec{v}$
Si $y' \neq 0$ on pose $\lambda = \frac{y}{y'}$ et donc $xy' - x'y = 0 \Leftrightarrow xy' - x'\lambda y' = 0 \Leftrightarrow x = \lambda x'$ donc on a bien $\vec{u} = \lambda\vec{v}$
Si x'= y' = 0 alors $\vec{v} = \vec{0}$ et donc les vecteurs sont colinéaires.

Définition

Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul et (d) une droite.
On dit que $\vec{u}$ est un vecteur directeur de d quand ils partagent la même direction, c'est-à-dire lorsque tout vecteur ayant pour extrémités des points de (d) est colinéaire à $\vec{u}$.

Propriété

La droite d passant par un point A et de vecteur directeur $\vec{u}$ est l'ensemble des points M tels que $\vec{u}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont colinéaires.

Démonstration :

La propriété est une conséquence directe de la définition.

Méthode

Pour prouver l'alignement de trois points A, B et C il faut et suffit de montrer que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

Preuve

Trois points distincts A,B et C sont alignés
⇔ C est sur la droite (AB)
⇔ C est sur la droite passant par A et de vecteur directeur $\overrightarrow{AB}$
⇔ $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

II. Equations cartésiennes d'une droite

Propriété

Toute droite d a une équation de la forme $ax + by + c = 0$ avec $(a; b) \neq (0; 0)$.Un vecteur directeur de d est le vecteur $\vec{u}\binom{-b}{a}$.

Démonstration

Soit d une droite passant par un point $A(x_0; y_0)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\binom{\alpha}{\beta}$.

$M(x; y) \in d \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\binom{x-x_0}{y-y_0}$ et $\vec{u}\binom{\alpha}{\beta}$ sont colinéaires $\Leftrightarrow \beta(x - x_0) - \alpha(y - y_0) = 0$

$\Leftrightarrow \beta x - \beta x_0 - \alpha y + \alpha y_0 = 0 \Leftrightarrow \beta x - \alpha y - \beta x_0 + \alpha y_0 = 0 \Leftrightarrow ax + by + c = 0$ avec $a = \beta, b = -\alpha$ et $c = -\beta x_0 + \alpha y_0$.

Donc M a ses coordonnées qui vérifient l'équation $ax + by + c = 0$

De plus $\vec{u} \neq \vec{0}$ donc on ne peut donc avoir $\binom{\alpha}{\beta} = \binom{0}{0}$ et donc $(a; b) \neq (0; 0)$.

Propriété

Soit a, b et c trois réels tels que $(a; b) \neq (0; 0)$

L'ensemble des points $M(x; y)$ tels que $ax + by + c = 0$ est une droite de vecteur directeur $\vec{u}\binom{-b}{a}$.

Démonstration

Soit a, b et c trois réels tels que $(a; b) \neq (0; 0)$

Pour trouver un point $A(x_0; y_0)$ tel que $ax_0 + by_0 + c = 0$

Je m'adapte à la situation :

si a=0, alors x_0 peut prendre n'importe quelle valeur mais comme $by_0 + c = 0$ on aura nécessairement $y_0 = -\frac{c}{b}$ (comme a =0 , b ne peut pas aussi être nul)

Si $a \neq 0$ alors on a $x_0 + \frac{b}{a}y_0 + \frac{c}{a} = 0$, on prendra n'importe quelle valeur pour y_0 et $x_0 = -\frac{b}{a}y_0 - \frac{c}{a}$

On a donc : $ax_0 + by_0 + c = 0$.

soit $M(x; y)$ tels que $ax + by + c = 0$

$\Leftrightarrow$ $a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$ (par soustraction)

$\Leftrightarrow$ $a(x - x_0) - (-b)(y - y_0) = 0$

$\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AM}\binom{x-x_0}{y-y_0}$ et $\vec{u}\binom{-b}{a}$ sont colinéaires

$\Leftrightarrow$ M est sur la droite passant par A et de coefficient directeur $\vec{u}\binom{-b}{a}$

Définition

Une équation d'une droite d de la forme $ax + by + c = 0$ avec $(a; b) \neq (0; 0)$ est appelée équation cartésienne de la droite d.

Remarque :

Toute droite a une infinité d'équations cartésiennes, on passe de l'une à l'autre en la multipliant par un nombre non nul.

Si $\neq 0$, on peut réécrire l'équation sous la forme $y = mx + p$ avec $m = -\frac{a}{b}$ et $p = -\frac{c}{b}$, c'est l'équation réduite de d, et elle est unique.

Si $b = 0$ alors $x = -\frac{c}{a}$ on a à faire à une droite verticale

L'ensemble des points $M(x; y)$ tels que $ax + by + c = 0$ est une droite de vecteur directeur $\vec{u}\binom{-b}{a}$

Propriété

d et d' sont deux droites d'équations cartésiennes respectives : ax+by +c = 0 et a'x+b'y+c'=0 avec $(a; b) \neq (0; 0)$ et $(a'; b') \neq (0; 0)$.

d et d' sont parallèles si, et seulement si, ab' – a'b = 0

Démonstration :

ab' – a'b = 0 $\Leftrightarrow$ -a'b + ab' = 0 $\Leftrightarrow \vec{u}\binom{-b}{a}$ et $\vec{u'}\binom{-b'}{a'}$ sont colinéaires $\Leftrightarrow$ d et d' sont parallèles

III. Décomposition d'un vecteur

Propriété :
Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non colinéaires.
Pour tout vecteur $\vec{w}$, il existe un couple unique $(a; b)$ de nombres réels tels que : $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$

Démonstration
Soit O un point du plan.
Plaçons M, U et V trois points tels que $\overrightarrow{OM} = \vec{w}$, $\overrightarrow{OU} = \vec{u}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{OV}$
Traçons maintenant les parallèles à $\vec{u}$ et $\vec{v}$, passant par M elles coupent respectivement (OV) et (OU) en M_2 et M_1 .
M_1 est sur (OU) donc $\overrightarrow{OM_1}$ et $\overrightarrow{OU}$ sont colinéaires et donc il existe un unique réel a tel que $\overrightarrow{OM_1} = a\overrightarrow{OU}$, de la même manière il existe un unique réel b tel que $\overrightarrow{OM_2} = b\overrightarrow{OV}$
$\vec{w} = \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{M_1M}$ or M_1MM_2O est un parallélogramme donc $\overrightarrow{M_1M} = \overrightarrow{OM_2}$ donc
$\vec{w} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2} = a\overrightarrow{OU} + b\overrightarrow{OV}$
CQFD

Exemple :
Soit ABC un triangle et D, E et F les points définis par $\overrightarrow{BE} = 3\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{DF} = 3\overrightarrow{BA}$

1) en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$, exprimez $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AF}$, puis $\overrightarrow{DE}$ et $\overrightarrow{BF}$.
2) Les vecteurs $\overrightarrow{DE}$ et $\overrightarrow{EF}$ sont ils colinéaires ?

1)
$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}$
$\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DF} = 2\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} + 3\overrightarrow{BA} = 2\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} - 3\overrightarrow{AB} = -1\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$
$\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AE} = -\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} = -\left(2\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}\right) + \overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$
$\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AF} = -\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF} = -\overrightarrow{AB} + \left(-1\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}\right) = -2\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$
2)
Soit on voit tout de suite que $\overrightarrow{BF} = -2\overrightarrow{DE}$ Soit : Dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$ on a : $\overrightarrow{DE}\binom{-1}{1}$ et $\overrightarrow{BF}\binom{2}{-2}$
$(-1) \times (-2) - 1 \times 2 = 0$ les deux vecteurs sont colinéaires.
Comme les vecteurs sont colinéaires, ils sont de même direction et donc (BF) et (DE) sont parallèles.

Version lourdingue

Soit au moins un des deux est le vecteur $\vec{0}(0;0)$ et dans ce cas-là on aura automatiquement xy' – x'y = 0

Soit aucun des deux n'est nul, et donc pour chaque vecteur au moins une des coordonnées est non nulle.

Soit x= 0 et dans ce cas là

soit y =0, et dans ce cas $\vec{u} = \vec{0}$ et donc les vecteurs sont colinéaires

soit $y \neq 0$ et donc $x' = 0$

nullité	x	y	x et y	aucun
x'	On pose $\lambda = \frac{y}{y'}$ et on a bien $\vec{u} = \lambda\vec{v}$	Impossible, la différence de produit ne peut être nulle	au moins un des vecteurs est nul donc ils sont colinéaires	impossible
y'	impossible	On pose $\lambda = \frac{x}{x'}$ et on a bien $\vec{u} = \lambda\vec{v}$	au moins un des vecteurs est nul donc ils sont colinéaires	impossible
x' et y'	au moins un des vecteurs est nul donc ils sont colinéaires	au moins un des vecteurs est nul donc ils sont colinéaires	au moins un des vecteurs est nul donc ils sont colinéaires	au moins un des vecteurs est nul donc ils sont colinéaires
aucun	impossible	impossible	au moins un des vecteurs est nul donc ils sont colinéaires	On pose $\lambda = \frac{x}{x'}$ donc $xy' - x'y = 0 \Leftrightarrow \lambda\, xy' = xy$ donc $\frac{y}{y'} = \lambda$ et on aura bien $\vec{u} = \lambda\vec{v}$