Géométrie Plane (correction)

Exercice 1 1) Dans chaque couple, les vecteurs sont-ils colinéaires ?

a) $3\vec{u}\binom{1}{3} = \vec{v}\binom{3}{9}$ donc les vecteurs sont colinéaires;

b) $\vec{u}\binom{5}{-10} et\ \vec{v}\binom{2}{4}$; $5 \times 4 - (-10) \times 2 = 40$ les vecteurs ne sont donc pas colinéaires

c) $\vec{u}\binom{1-\sqrt{5}}{1} et\ \vec{v}\binom{5-\sqrt{5}}{-\sqrt{5}}$; on a $\vec{v} = -\sqrt{5}\vec{u}$ donc les vecteurs sont colinéaires;

d) $\vec{u}\binom{-2}{6} et\ \vec{v}\binom{1}{3}$; $-2 \times 3 - 6 \times 1 = -12$ les vecteurs ne sont donc pas colinéaires

e) $\vec{u}\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\-\frac{4}{7}\end{pmatrix} et\ \vec{v}\begin{pmatrix}\frac{1}{4}\\-\frac{3}{7}\end{pmatrix}$; $\frac{1}{3} \times \left(-\frac{3}{7}\right) - \left(-\frac{4}{7}\right)\frac{1}{4} = -\frac{1}{7} + \frac{1}{7} = 0$

f) $\vec{u}\binom{\sqrt{3}+1}{-2} et\ \vec{v}\binom{1}{1-\sqrt{3}}$ $(\sqrt{3}+1) \times (1-\sqrt{3}) - (-2)1 = (1-3) + 2 = 0$

2) trouver m pour que les deux vecteurs soient colinéaires.

a) $\vec{u}\binom{-3}{m} et\ \vec{v}\binom{-3m}{4}$ colinéaires ⇔ $-3 \times 4 - m(-3m) = 0$ ⇔3m²=12 ⇔ m² = 4 ⇔m = 2 ou -2

b) $\vec{u}\binom{1}{2} et\ \vec{v}\binom{m-1}{m+3}$ colinéaires ⇔ $1 \times (m+3) - 2(m-1) = 0$ ⇔ -m + 5 = 0 ⇔ m= 5

c) $\vec{u}\binom{m}{m-2} et\ \vec{v}\binom{3}{m-3}$ colinéaires ⇔ $m \times (m-3) - (m-2)3 = 0$ ⇔ m²-6m+6=0

$\Delta = 36 - 24 = 12$ *il y a donc 2 solutions*

$m_1 = \frac{6-\sqrt{12}}{2} = \frac{6-2\sqrt{3}}{2} = 3 - \sqrt{3}$ et $m_2 = \frac{6-\sqrt{12}}{2} = \frac{6-2\sqrt{3}}{2} = 3 + \sqrt{3}$

Exercice 2 Dans chaque cas dire si les trois points sont alignés

a) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}-\left(-\frac{7}{2}\right)\\\frac{4}{3}-0\end{pmatrix} = \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}\frac{8}{2}\\\frac{4}{3}\end{pmatrix} = \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4\\\frac{4}{3}\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}\frac{5}{2}-\left(-\frac{7}{2}\right)\\2-0\end{pmatrix} = \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}\frac{12}{2}\\2\end{pmatrix} = \overrightarrow{AC}\binom{6}{2}$

Je remarque que $\overrightarrow{AC} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$ donc les vecteurs sont colinéaires, les droites (AC) et (AB) sont parallèles et ont un point en commun et elles sont donc confondues. Les points A, B et C sont donc alignés.

b) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}-2\\-1-3\end{pmatrix} = \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}\frac{-3}{2}\\-4\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AC}\binom{3-2}{4-3} = \overrightarrow{AC}\binom{1}{1}$

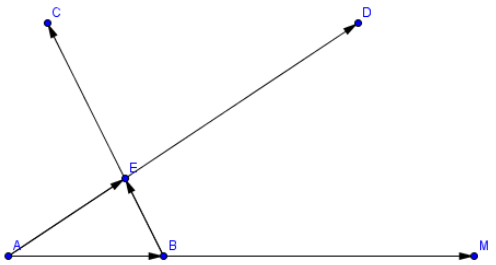
$\frac{-3}{2} \times 1 - (-4) \times 1 = \frac{5}{2} \neq 0$ les deux vecteurs ne sont donc pas colinéaires et donc A,B et C forment un triangle non plat, ils ne sont pas alignés.

c) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1-6\\\frac{7}{6}-2\end{pmatrix} = \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-5\\-\frac{5}{6}\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-3-6\\\frac{1}{2}-2\end{pmatrix} = \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-9\\-\frac{3}{2}\end{pmatrix}$

$-5 \times \left(-\frac{3}{2}\right) - \left(-\frac{5}{6}\right) \times (-9) = \frac{15}{2} - \frac{45}{6} = 0$

Les vecteurs sont colinéaires, les droites (AC) et (AB) sont parallèles et ont un point en commun et elles sont donc confondues. Les points A, B et C sont donc alignés.

Exercice 3



1) a)

$2\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} = \vec{0}$ ⇔ $2\overrightarrow{MA} - 3\left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB}\right) = \vec{0}$

⇔ $-\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{AB} = \vec{0}$⇔$\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{AB}$

2) $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right)$

$= \overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{3}\left(2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right) = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$

donc $\overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AE}$

les droites (AD) et (AE) sont donc parallèles et passent par A et donc elles sont confondues et donc D est sur (AE)

Exercice 4

1) $\overrightarrow{AB}\binom{2-2}{0-4}$=$\overrightarrow{AB}\binom{0}{-4}$ donc (AB) a comme vecteur directeur $\overrightarrow{AB}\binom{0}{-4}$, je cherche c tel que 4x+0y+c=0

(AB) passe par A(2 ;4) donc $4 \times 2 + 0 \times 4 + c = 0$ ⇔ c = -8 donc 4x+0y- 8=0 (ou encore x= 2)

$\overrightarrow{FE}\binom{3-(-1)}{2-1}$ = $\overrightarrow{FE}\binom{4}{1}$ est un vecteur directeur de (EF) , cette droite aura donc une de ses équation cartésienne qui sera -x + 4y + c = 0

Déterminons c : cette droite passe par E(3 ;2) donc -3 +4×2 + c = 0 et donc c = -5

Ainsi l'équation est : -x + 4y – 5 = 0

Pour l'équation réduite : $4y = x + 5$ ⇔ $y = \frac{x}{4} + \frac{5}{4}$

De la même manière $\overrightarrow{CD}\binom{6}{-4}$, équation cartésienne 4x + 6y - 24 = 0 , équation réduite : $y = -\frac{2}{3}x + 4$

De la même manière $\overrightarrow{CA}\binom{2}{0}$, équation cartésienne 0x - 2y + 8 = 0 , équation réduite : $y = 4$

2) $\overrightarrow{GH}\binom{16}{4}$ donc $\overrightarrow{GH} = 4\overrightarrow{FE}\binom{4}{1}$, les deux droites ayants des vecteurs directeurs colinéaires elles sont parallèles.

$\overrightarrow{IJ}\binom{7}{-4}$ et $\overrightarrow{ED}\binom{3}{-2}$ sont non colinéaires, donc les droites (IJ) et (ED) ne seront pas parallèles.

3) La droite passera par K(3 ;2) et L(-2 ;3)

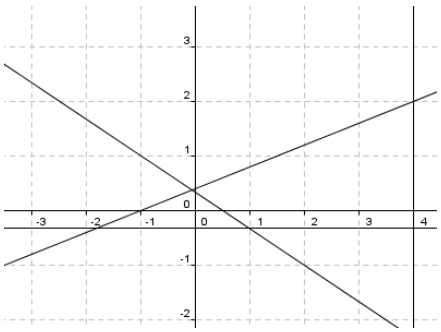
Exercice 5 Construire et donner le coefficient directeur de chaque droite

a) 2x – 5y + 2 =0 ⇔ $y = 0{,}4x + 0{,}4$

b) –x + 4 = 0 ⇔ x = 4

c) 3y + 2x – 1 =0 ⇔ $y = -\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$

d) 3y + 1 = 0 ⇔ $y = \frac{-1}{3}$



Exercice 6 Déterminer dans chaque cas une équation de la parallèle à d passant par A.

a) $A(0;-2)$ et d : 2x – 3y +6 = 0 comme on cherche une parallèle les vecteurs directeurs restent les même et donc une équation de d' notre parallèle sera : 2x - 3y + c = 0 de plus celle-ci passant par $A(0;-2)$ on aura : $2x \times 0$ -3(-2)+ c = 0 donc c = -6. Une équation sera donc 2x - 3y – 6 = 0

b) $A(1;4)$ et d : $\frac{4}{5}x - 2y + \frac{3}{4} = 0$, cherchons c tel que $\frac{4}{5}x - 2y + c = 0$ soit une équation de la parallèle à d passant par A. On aura : $\frac{4}{5}1 - 2 \times 4 + c = 0$ donc $c = -\frac{36}{5}$

donc d' : $\frac{4}{5}x - 2y - \frac{36}{5} = 0$

Exercice 7 Soit d_1 et d_2 les droites d'équation respectives : 2x-5y+1 = 0 et -4x + y -6 = 0

a) vérifier que les droites d_1 et d_2 sont bien sécantes.

Ces droites ont pour vecteur directeurs respectifs $\vec{u}\binom{5}{2} et\ \vec{v}\binom{-1}{-4}$, or $5(-4) - 2(-1) = -20 + 2 = -18$ donc les vecteurs ne sont pas colinéaires et les droites ne sont pas parallèles donc elles sont sécantes.

b) déterminer les coordonnées du point d'intersection de ces deux droites.

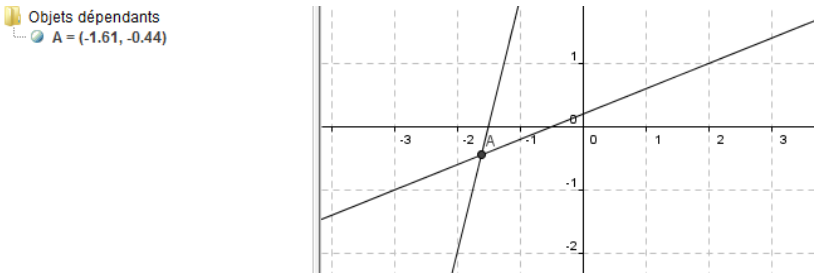
$$\begin{cases} 2x - 5y + 1 = 0 \\ -4x + y - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x - 10y + 2 = 0 \\ -4x + y - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x - 10y + 2 = 0 \\ -9y - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x - 10y + 2 = 0 \\ y = -\frac{4}{9} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x - 10\left(-\frac{4}{9}\right) + 2 = 0 \\ y = -\frac{4}{9} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x = -\frac{58}{9} \\ y = -\frac{4}{9} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{29}{18} \\ y = -\frac{4}{9} \end{cases}$$

Les droites vont donc se croiser au point $A\left(-\frac{29}{18}; -\frac{4}{9}\right)$

c) vérifier ce résultat en utilisant Géogébra.



Exercice 8 Après avoir vérifié que $\vec{u}\ et\ \vec{v}$ ne sont pas colinéaires, exprimer $\vec{w}$ en fonction de $\vec{u}\ et\ \vec{v}$.

a) $\vec{u}\binom{3}{-1};\ \vec{v}\binom{1}{4} et\ \vec{w}\binom{5}{7}$

$3 \times 4 - (-1)1 = 13$

Donc $\vec{u}\ et\ \vec{v}$ ne sont pas colinéaires

Soit x et y tels que $\vec{w} = x\,\vec{u} + y\vec{v}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x + y = 5 \\ -1x + 4y = 7 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 5 - 3x \\ 1x + 4y = 7 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 5 - 3x \\ -1x + 4(5 - 3x) = 7 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 5 - 3x \\ -13x + 20 = 7 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 5 - 3x \\ x = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 5 - 3 \\ x = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \\ x = 1 \end{cases}$$

$\vec{w} = 1\,\vec{u} + 2\vec{v}$

b) $\vec{u}\binom{2}{1};\ \vec{v}\binom{-1}{3} et\ \vec{w}\binom{5}{-3}$

$2 \times 3 - 1(-1) = 7$

Donc $\vec{u}\ et\ \vec{v}$ ne sont pas colinéaires

Soit x et y tels que $\vec{w} = x\,\vec{u} + y\vec{v}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y = 5 \\ 1x + 3y = -3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 5 = y \\ 1x + 3y = -3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 5 = y \\ 1x + 3(2x - 5) = -3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 5 = y \\ 7x - 15 = -3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 5 = y \\ x = \frac{12}{7} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{24}{7} - 5 = y \\ x = \frac{12}{7} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{-11}{7} = y \\ x = \frac{12}{7} \end{cases}$$

$\vec{w} = \frac{12}{7}\,\vec{u} - \frac{11}{7}\vec{v}$

c) $\vec{u}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{4} \end{pmatrix};\ \vec{v}\binom{-4}{1} et\ \vec{w}\binom{-2}{4}$

$\frac{1}{2}1 - \left(-\frac{3}{4}\right)(-4) = -2{,}5$

Donc $\vec{u}\ et\ \vec{v}$ ne sont pas colinéaires

Soit x et y tels que $\vec{w} = x\,\vec{u} + y\vec{v}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}x - 4y = -2 \\ -\frac{3}{4}x + 1y = 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 8y = -4 \\ -3x + 4y = 16 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 + 8y \\ -3x + 4y = 16 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 + 8y \\ -3(-4 + 8y) + 4y = 16 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 + 8y \\ 12 - 20y = 16 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 + 8y \\ y = -0{,}2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -5{,}6 \\ y = -0{,}2 \end{cases}$$

$\vec{w} = -5{,}6\,\vec{u} - 0{,}2\vec{v}$

Exercice 9

Cet exercice est le grand frère de l'exercice 3, il s'agit encore de prouver l'alignement en prouvant que des vecteurs dont le nom partagent un point sont colinéaires. Ici on devra exprimer les deux vecteurs en question en fonction d'une base $(\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AB})$. Les « coordonnées » étant proportionnelles on pourra établir la colinéarité.

Dessiner ABCD est un parallélogramme puis E et F les points définis par $\overrightarrow{AE} = 3\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{BF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

1) Exprimer $\overrightarrow{EC}$ et $\overrightarrow{CF}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AB}$.

$\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AC}$

$= -\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ propriété du parallélogramme

$= -3\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = -2\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB}$

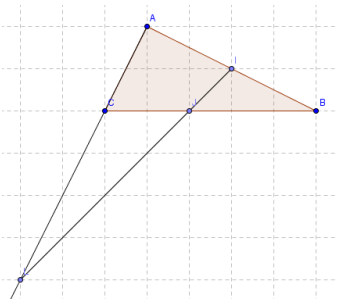
$\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{CB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

$= -\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

2) En déduire que les points E,C et F sont alignés.

On sait que : $\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{CF}$ les vecteurs $\overrightarrow{EC}$ et $\overrightarrow{CF}$ étant colinéaires les points E,C et F sont alignés.

Exercice 10 Construire un triangle ABC, I le milieu du côté [AB], Jet L tels que $\overrightarrow{BJ} = \frac{3}{5}\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AL} = 3\overrightarrow{AC}$.



1) Exprimer $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{JL}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

$\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BJ} = \overrightarrow{IB} + \frac{3}{5}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{5}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{5}\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right) = -\frac{1}{10}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{5}\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{JL} = \overrightarrow{JB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AL} = -\overrightarrow{BJ} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AL} = -\frac{3}{5}\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA} + 3\overrightarrow{AC}$

$= -\frac{3}{5}\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right) + \overrightarrow{BA} + 3\overrightarrow{AC} = \frac{2}{5}\overrightarrow{BA} + \frac{12}{5}\overrightarrow{AC} = -\frac{2}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{12}{5}\overrightarrow{AC}$

On a donc $\overrightarrow{JL} = 4\overrightarrow{IJ}$

2) Les points I,J et L sont-ils alignés ?

On a donc $\overrightarrow{JL} = 4\overrightarrow{IJ}$ donc les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{JL}$ sont colinéaires et donc les points I,J et L sont alignés.

Exercice 11 écrire un algorithme permettant de dire pour chaque couple de droites ax + by + c= 0 et a'x+b'y+c'=0 si elles sont parallèles ou pas. Question violente : poursuivez l'algorithme pour que le programme donne les coordonnées du point d'intersection s'il existe.

Pour que les droites soient parallèles il faut et suffit qu'elles aient des vecteurs directeurs colinéaires.
La première droite a pour vecteur directeur (entre autres) $\binom{-b}{a}$ la deuxième aura $\binom{-b'}{a'}$.
Il suffirait donc de tester si –ba'-(-b'a) vaut zéro ou pas.

L'algorithme pourrait être le suivant :

Afficher « première droite d'équation ax + by + c= 0»
Récupérer A, B et C
Afficher « deuxième droite d'équation a'x+b'y+c'=0»
Récupérer M,P et Q
Si –ba'-(-b'a) =0 Afficher « les droites sont parallèles »
Sinon afficher « les droites sont sécantes »
*
Fin du test

Algorithme de la mort qui tue (si on veut prévoir les coordonnées du point d'intersection) à injecter dans l'algorithme précédent à la place de *
Si a=0 alors afficher « x vaut » , (b'c-bc')/(ba') , « y vaut », -c/b Fin de Si
Si a'=0 alors afficher « x vaut » , (bc'-b'c)/(b'a) , « y vaut », -c'/b' Fin de Si
Si a≠0 et a'≠0 alors afficher « x vaut » , $\frac{-b\left(\frac{a'c-ac'}{ab'-a'b}\right)-c}{a}$, « y vaut », $\frac{a'c-ac'}{ab'-a'b}$ Fin de Si

La question que vous pouvez vous poser c'est comment est-ce que l'on a trouvé ces résultats, est ce qu'il n'y aurait pas une erreur, et pour répondre à ces questions , vous êtes obligé de résoudre le système : $\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}$, à vos stylos !