Devoir Surveillé n°1

Exercice 1 6 points

Un automobiliste, face à un obstacle imprévu, met une seconde à réagir, puis commence à freiner. Appelons v sa vitesse, en km/h au moment où il aperçoit l'obstacle. On admettra que la distance parcourue pendant le temps de réaction est $\frac{v}{3,6}$ et que celle durant le temps de freinage est $\frac{v^2}{150}$

1) Montrer que la distance d'arrêt en mètres vaut $\frac{6v^2+250v}{900}$. En utilisant la fonction tableur de votre calculatrice complétez le tableau suivant (les résultats seront des valeurs approchées au dixième)

vitesse (km/h)	30	50	70	100	130	150
distance réaction + freinage en (m)						

2) A quelle vitesse maximale doit-on rouler pour être en mesure de s'arrêter quand un obstacle surgit à 50m (donner une valeur exacte puis arrondie au dixième)?

3) Sur route mouillée, la distance de freinage est doublée (mais pas la distance de réaction). Que devient alors le résultat de la question 2 ?

Exercice 2 9 points

Résoudre dans ℝ les équations et inéquations suivantes :

1) Soit f la fonction définie sur ℝ par $f(x) = 9x^2 + 69x + 22$

- a) Donner la ou les racines de f
- b) En déduire une forme factorisée de f
- c) Résoudre $f(x) > 0$
- d) Donner la forme canonique de la fonction
- e) Donner les coordonnées du sommet

2) Résoudre dans ℝ l'équation (E) : $9\left(\frac{2t}{t+1}\right)^2 + 69\left(\frac{2t}{t+1}\right) + 22 = 0$

Exercice 3 5 points

1) S est un réel positif, on cherche à déterminer deux réels a et b de somme 10, dont la somme des carrés est S.

a) Montrer que cela conduit à résoudre l'équation $2a^2 - 20a + 100 - S = 0$

b) Montrer que le discriminant de cette équation vaut $8S - 400$.

c) En déduire les valeurs de S pour lesquelles l'équation a des solutions.

d) Répondre à la question posée (relire les deux premières lignes de l'exercice).

Correction

Exercice 1

1) Montrer que la distance d'arrêt en mètres vaut $\frac{6v^2+25v}{900}$. $\frac{v}{3,6}+\ k\ v^2=\frac{v\times25}{3,6\times25}+\ \frac{6}{900}\ v^2=\frac{6v^2+25v}{900}$

La distance d'arrêt est la somme des deux distances calculées au 1 et au 2.

Elle vaut : $\frac{v}{3,6}+\ k\ v^2=\frac{v\times250}{3,6\times250}+\ \frac{6}{900}\ v^2=\frac{6v^2+250v}{900}$

la distance d'arrêt :

vitesse en km/h	30	50	70	100	130	150
distance réaction + freinage en (m)	14,3	30,6	52,1	94,4	148,8	191,7

2) A quelle vitesse maximale doit-on rouler pour être en mesure de s'arrêter quand un obstacle surgit à 50m ?

$\frac{6v^2+250v}{900}=50 \Leftrightarrow 6v^2+250v=45000 \Leftrightarrow 6v^2+250v-45000=0$

$\Delta=1\,142\,500$ $\Delta>0$ donc on aura deux solutions possibles : $v_1=\frac{-250-\sqrt{1142500}}{12}\approx-109,91$

$v_2=\frac{-250+\sqrt{1142500}}{12}\approx 68,2$ on gardera la solution positive, l'automobiliste ne devra pas dépasser le 84,5km/h

3) Sur route mouillée, la distance de freinage est doublée (mais pas la distance de réaction). Que devient alors le résultat de la question 4 ?

$\frac{2\times6v^2+250v}{900}=50 \Leftrightarrow 12v^2+250v=45000 \Leftrightarrow 12v^2+250v-45000=0$

$\Delta=2\,222\,500$ $\Delta>0$ donc on aura deux solutions possibles : $v_1=\frac{-250-\sqrt{2222500}}{24}\approx-72,5$

$v_2=\frac{-250+\sqrt{2222500}}{24}\approx 60,2$ on gardera la solution positive, l'automobiliste ne devra pas dépasser le 51,7km/h

Exercice 2

1)a) $f(x)=0 \quad\Leftrightarrow\quad 9x^2+69x+22=0 \quad (E_f)$

$\Delta=69^2-4\times9\times22=3969=63^2$ $\Delta>0$ donc la fonction aura deux racines :

$x_1=\frac{-69-63}{2\times9}=-\frac{132}{18}=-\frac{22}{3}$ $x_2=\frac{-69+63}{2\times9}=-\frac{6}{18}=-\frac{1}{3}$ $S=\left\{-\frac{22}{3};-\frac{1}{3}\right\}$

b) $f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)=9\left(x+\frac{22}{3}\right)\left(x+\frac{1}{3}\right)$

c) $\Delta>0$ donc le polynôme aura deux racines : $-\frac{22}{3}\ et\ -\frac{1}{3}$, entre ces racines le polynôme sera négatif, et il sera positif à l'extérieur. $9x^2+69x+22>0$ a pour solution $S=]-\infty;-\frac{22}{3}[\cup]-\frac{1}{3};+\infty[$

d) la forme canonique est $f(x)=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right]=9\left[\left(x+\frac{69}{18}\right)^2-\frac{3969}{324}\right]=9\left[\left(x+\frac{23}{6}\right)^2-\frac{49}{4}\right]$

e) les coordonnées du sommet sont $\left(-\frac{23}{6};\frac{441}{4}\right)$

2) $9\left(\frac{2t}{t+1}\right)^2+69\left(\frac{2t}{t+1}\right)+22=0$ (E)

je pose $x=\left(\frac{2t}{t+1}\right)$ ainsi (E) $\Leftrightarrow$ (E_f) donc $x_1=-\frac{22}{3}$ et $x_2=-\frac{1}{3}$

$x=\left(\frac{2t}{t+1}\right)$ donc je dois résoudre :

$-\frac{22}{3}=\frac{2t}{t+1} \Leftrightarrow -22(t+1)=6t \Leftrightarrow -28t=22 \Leftrightarrow t=-\frac{22}{28} \Leftrightarrow t=\frac{-11}{14}$

$-\frac{1}{3}=\frac{2t}{t+1} \Leftrightarrow -(t+1)=6t \Leftrightarrow -7t=1 \Leftrightarrow t=-\frac{1}{7}$

$S=\left\{\frac{-11}{14};-\frac{1}{7}\right\}$

Exercice 3

1) S est un réel positif, on cherche à déterminer deux réels a et b de somme 10, dont la somme des carrés est S.

a) Montrer que cela conduit à résoudre l'équation $2a^2 - 20a + 100 - S = 0$

on a $\begin{cases} a + b = 10 \\ a^2 + b^2 = S \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 10 - a \\ a^2 + b^2 = S \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 10 - a \\ a^2 + (10 - a)^2 = S \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 10 - a \\ 2a^2 - 20a + 100 = S \end{cases}$

il nous faudra donc résoudre $2a^2 - 20a + 100 - S = 0$ et une simple soustraction nous permettra de déterminer b.

b) Montrer que le discriminant de cette équation vaut $8S - 400$.

$$\Delta = (-20)^2 - 4 \times 2 \times (100 - S) = 400 - 800 + 8S = 8S - 400$$

c) En déduire les valeurs de S pour lesquelles l'équation a des solutions.

l'équation a des solutions $\Leftrightarrow \Delta > 0 \Leftrightarrow 8S - 400 > 0 \Leftrightarrow S > 50$

d) Répondre à la question posée.

Si S=50 alors $\Delta = 0$ et donc il y a une solution : $a_0 = \frac{20}{4} = 5$, et effectivement si a=b=5 les conditions sont vérifiées.

Si S>50 les solutions sont $a_1 = \frac{20 - \sqrt{8S - 400}}{4} = 5 - \sqrt{\frac{S}{2} - 25}$ et $a_2 = \frac{20 + \sqrt{8S - 400}}{4} = 5 + \sqrt{\frac{S}{2} - 25}$ ce qui nous amène à une deuxième contrainte. Les solutions doivent être positives donc $20 + \sqrt{8S - 400} \geq 0$, je multiplie à gauche et à droite par $20 + \sqrt{8S - 400}$ et j'ai donc une identité remarquable :

$400 - (8S - 400) \geq 0 \Leftrightarrow 800 - 8S \geq 0 \Leftrightarrow 100 \geq S$. Pour avoir deux solutions distinctes il me faudra avoir $50 < S \leq 100$

Une fois qu'on a le a , on peut en déduire le b : b = 10 – a , d'où :

$b_1 = 10 - a_1 = 10 - \left(5 - \sqrt{\frac{S}{2} - 25}\right) = 5 + \sqrt{\frac{S}{2} - 25} = a_2$, et de même $b_2 = a_1$

Autrement dit quand $50 < S \leq 100$ les valeurs de a et b sont $5 - \sqrt{\frac{S}{2} - 25}$ et $5 + \sqrt{\frac{S}{2} - 25}$.

Si S = 50 on aura a=b=5.