Fiche d'exercice 1

Second degré

Exercice 1.

Résoudre dans ℝ les équations suivantes :

5x²-3x=0 ⇔ x(5x-3)=0 ⇔ x= 0 ou 5x-3 = 0 ⇔ $S = \left\{0; \frac{3}{5}\right\}$

9x²-4 = 0 ⇔(3x)²-2²=0 ⇔ [3x-2][3x+2]=0 ⇔ $S = \left\{-\frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right\}$

3x²+1=0 $S = \{\emptyset\}$ x²-2x+1=0 ⇔ (x-1)²=0 ⇔ x=1

Exercice 2.

Résoudre dans ℝ les équations suivantes :

a) $x^2 + 2x - 3 = 0$
$\Delta = 4 - 4 \times 1 \times (-3) = 16$
$x_1 = \frac{-2-\sqrt{16}}{2}$ et $x_2 = \frac{-2+\sqrt{16}}{2}$
$S = \{-3; 1\}$

b) $x^2 + 2x - 21 = 0$
$\Delta = 88$
$x_1 = \frac{-2-\sqrt{88}}{2}$ et $x_2 = \frac{-2+\sqrt{88}}{2}$
$S = \{-1-\sqrt{22}; -1+\sqrt{22}\}$

c) $9x^2 + 6x + 1 = 0$
$\Delta = 0$
$x_0 = \frac{-6}{2\times 9}$
$S = \left\{-\frac{1}{3}\right\}$

d) $x^2 - x - 1 = 0$
$\Delta = 5$
$x_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ et $x_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$
$S = \left\{\frac{1-\sqrt{5}}{2}; \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right\}$

e) $-x^2 + 6x + 1 = 0$
$\Delta = 40$
$x_1 = \frac{-6-\sqrt{40}}{-2}$ et $x_2 = \frac{-6+\sqrt{40}}{-2}$
$S = \{3+\sqrt{10}; 3-\sqrt{10}\}$

f) (x²-4x-2)(-2x²+3x+4)=0
$\Delta = 24$ $\Delta' = 41$
| $x_1 = \frac{4-\sqrt{24}}{2}$, $x_2 = \frac{4+\sqrt{24}}{2}$, $x'_1 = \frac{-3-\sqrt{41}}{-4}$ et $x'_2 = \frac{-3+\sqrt{41}}{-4}$
$S = \left\{2-\sqrt{6}; 2+\sqrt{6}; \frac{3+\sqrt{41}}{4}; \frac{3+\sqrt{41}}{4}\right\}$

g) $\frac{2x-1}{x+3} - \frac{5x-4}{5x} = 0$
Sur le domaine d'étude $D_e = \mathbb{R}\backslash\{-3; 0\}$
⇔ $(2x-1)5x - (5x-4)(x+3) = 0$
⇔ $10x^2 - 5x - 5x^2 - 15x + 4x + 12 = 0$
⇔$5x^2 - 16x + 12 = 0$
$\Delta = 256 - 240 = 16$
$x_1 = \frac{16-\sqrt{16}}{10} = 1{,}2$ et $x_2 = \frac{16+\sqrt{16}}{10} = 2$

h) $\frac{2x+3}{x-4} - \frac{3x+2}{x+4} = 0$
Sur le domaine d'étude $D_e = \mathbb{R}\backslash\{-4; 4\}$
⇔ $(2x+3)(x+4) - (3x+2)(x-4) = 0$
⇔ $2x^2 + 8x + 3x + 12 - 3x^2 + 12x - 2x + 8 = 0$
⇔ $-x^2 + 21x + 20 = 0$
$\Delta = 441 + 80 = 521$
$x_1 = \frac{-21-\sqrt{521}}{-2}$ et $x_2 = \frac{-21+\sqrt{521}}{-2}$

Exercice 3.

Résoudre dans ℝ les inéquations suivantes :

a) $x^2 - 2x + 1 \geq 0$
$\Delta = 0$
$x_0 = \frac{2}{2} = 1$
Donc le poly est positif ou
S'annule en 1
S= ℝ

b) $x^2 + 2x + 3 < 0$
$\Delta = -8$
$x^2 + 2x + 3$ ne s'annule jamais
le poly est toujours strictement positif donc
$S = \{\emptyset\}$

c) $4x^2 - x + 1 < 0$
$\Delta = -15$
$4x^2 - x + 1$ ne s'annule jamais
le poly est toujours strictement positif donc
$S = \{\emptyset\}$

d) $-5x^2 + 4x + 1 \geq 0$
$\Delta = 36$
$x_1 = \frac{-4-\sqrt{36}}{-10}$ et $x_2 = \frac{-4+\sqrt{36}}{-10}$
$x_1 = 1$ *et* $x_2 = -0{,}2$
Le poly est positif (signe de –a)
entre les racines x_1 et x_2
$S = [-0{,}2; 1]$

e) $3x^2 - 4x + \frac{4}{3} > 0$
$\Delta = 0$
$x_0 = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$
Donc le poly est positif ou
s'annule en $\frac{2}{3}$
S= ℝ\ $\left\{\frac{2}{3}\right\}$

f) $-2x^2 + x + 3 < 0$
$\Delta = 25$
$x_1 = \frac{-1-\sqrt{25}}{-4}$ et $x_2 = \frac{-1+\sqrt{25}}{-4}$
$x_1 = 1{,}5$ *et* $x_2 = -1$
donc le poly est nég (signe de a)
à l'extérieur des racines
$S =]-\infty; -1[\cup]1{,}5; +\infty[$

Exercice 4.

Soit l'équation : (E) $(m+2)x^2 - 2mx + 2m - 3 = 0$ où x est l'inconnue, et m un paramètre réel

1) Etudier l'équation (E) pour m = -2

Si m=-2 (E) ⇔ 4x – 7 = 0 ⇔ $x = \frac{7}{4}$

2) Pour quelle(s) valeur(s) du paramètre m l'équation (E) admet-elle deux solutions ? Une seule solution ? Aucune solution?

Supposons maintenant que $m \neq -2$

Fiche d'exercice 1

Donc E est une équation du second degré, avec a = (m+2), b=-2m et c=2m-3

$\Delta = (-2m)^2 - 4(m+2)(2m-3) = 4m^2 - 4(2m^2 + m - 6) = -4m^2 - 4m + 24$

Le nombre de solution de (E) est donné par le signe de Δ.

Résolvons $\Delta = 0$

$\Delta_m = 16 + 384 = 400$ et donc $m_1 = \frac{4-\sqrt{400}}{-8} = \frac{-16}{-8} = 2$ et $m_2 = \frac{4+\sqrt{400}}{-8} = -3$

Donc sur $]-3;2[\setminus\{-2\}$ Δ sera du signe de −(-4) donc sera positif et (E) aura deux solutions,

Pour m valant -3 , 2 (et -2) (E) aura une solution unique,

et sur $]-\infty;-3[\cup]-3;+\infty[$ Δ sera négatif donc pas de racine pour (E)

3) Lorsque les solutions de (E) existent, calculer leur somme et leur produit en fonction de m

Peut-on déterminer m pour que l'équation (E) ait deux solutions x' et x'' vérifiant la relation $x'x''=1$?

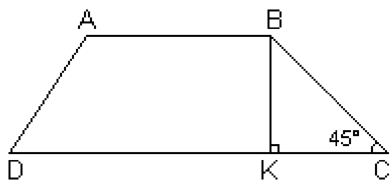
On sait que lorsqu'elles existent les solutions vérifient : $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ et $x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}$

Donc ici sur $]-3;2[\setminus\{-2\}$: $x_1 + x_2 = \frac{2m}{m+2}$ et $x_1 \times x_2 = \frac{2m-3}{m+2}$

Et donc $x_1 \times x_2 = 1 \Leftrightarrow \frac{2m-3}{m+2} = 1 \Leftrightarrow 2m - 3 = m + 2 \Leftrightarrow$ m=5 or 5 ne fait pas parti des valeurs permettant d'avoir deux solutions. Donc il n'existe pas de m permettant d'avoir deux solutions inverses l'une de l'autre.

Problèmes

1- Calculer la longueur de chacun des côtés d'un rectangle de périmètre 221 m et d'aire 2226 m².



$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} 2l + 2L = 221 \\ l \times L = 2226 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} l = \frac{1}{2}(221 - 2L) \\ l \times L = 2226 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} l = \frac{1}{2}(221 - 2L) \\ (110{,}5 - L) \times L = 2226 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} l = \frac{1}{2}(221 - 2L) \\ 0 = L^2 - 110{,}5L + 2226 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} l = \frac{1}{2}(221 - 2L) \\ 0 = L^2 - 110{,}5L + 2226 \end{cases}$

$\Delta = (-110{,}5)^2 - 4 \times 1 \times 2226 = 3306{,}25 = 57{,}5^2$

$L_1 = \frac{110{,}5-57{,}5}{2} = \frac{53}{2} = 26{,}5 \qquad L_2 = \frac{110{,}5+57{,}5}{2} = \frac{168}{2} = 84$

$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} l = \frac{1}{2}(221 - 2L) \\ L = 26{,}5 \text{ ou } L = 84 \end{cases} \Leftrightarrow L = 26{,}5 \text{ et } l = 84 \text{ ou } L = 84 \text{ et } l = 26{,}5$

Les dimensions de mon rectangle sont 26,5m et 84m

2- Une unité de longueur étant choisie, on considère un trapèze ABCD de hauteur [BK] tel que CK = a, KD = 42, AB = 2a et $\widehat{BCD} = 45°$. Déterminer le nombre réel a pour que l'aire de ce trapèze soit égale à 180.

L'aire du trapèze est $\frac{grande\ base + petite\ base}{2} \times h$, ici on aura donc $180 = \frac{AB+DC}{2} \times BK$

$\Leftrightarrow 180 = \frac{2a+(42+a)}{2} \times a$ en effetKBC est rectangle et isocèle.

$\Leftrightarrow 360 = (3a + 42) \times a \qquad \Leftrightarrow 0 = 3a^2 + 42a - 360$

$\Delta = 42^2 - 4 \times 3 \times (-360) = 6084 = 78^2$

$a_1 = \frac{-42-78}{6} = \frac{-120}{6} = -20 \qquad a_2 = \frac{-42+78}{6} = \frac{36}{6} = 6$

Vu qu'une longueur est nécessairement positive une seule solution sera recevable : 6 unités de mesure.

3- Inscrire un rectangle de 28 cm de périmètre dans un cercle de 5 cm de rayon.

On fait une figure à main levée pour comprendre de quoi il retourne.

Soit Let l les dimensions de mon rectangle, son périmètre vaut 28cm et sa diagonale mesure 10cm

$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} 2l + 2L = 28 \\ l^2 + L^2 = 100 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} l = 14 - L \\ l^2 + L^2 = 100 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} l = 14 - L \\ (14 - L)^2 + L^2 = 100 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} l = 14 - L \\ 2L^2 - 28L + 96 = 0 \end{cases}$

$\Delta = (-28)^2 - 4 \times 2 \times 96 = 16 = 4^2$

$L_1 = \frac{28-4}{4} = \frac{24}{4} = 6 \qquad L_2 = \frac{28+4}{4} = \frac{32}{4} = 8$

$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} l = 14 - L \\ L = 6 \text{ ou } L = 8 \end{cases} \Leftrightarrow L = 6 \text{ et } l = 8 \text{ ou } L = 8 \text{ et } l = 6$

Les dimensions du rectangles sont donc 6 et 8cm

4- Pour confectionner des rideaux, Claire a acheté du tissu pour 1152F. Si le vendeur lui avait fait une remise de 32F par mètre de tissu, elle aurait pu obtenir 6 mètres de plus en déboursant la même somme.

Combien de mètres de tissu Claire a-t-elle achetés ?

Fiche d'exercice 1

On ignore deux choses : la longueur de tissu acheté, et le prix au mètre de ce tissu. On notera ces inconnues respectivement x et y.

On a donc $(S) \Leftrightarrow \begin{cases} xy = 1152 \\ (x+6)(y-32) = 1152 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1152}{x} \\ (x+6)(y-32) = 1152 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1152}{x} \\ (x+6)\left(\frac{1152}{x} - 32\right) = 1152 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1152}{x} \\ 1152 - 32x + \frac{6912}{x} - 192 = 1152 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1152}{x} \\ 0 = 32x - \frac{6912}{x} + 192 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1152}{x} \\ 0 = 32x^2 + 192x - 6912 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1152}{x} \\ 0 = x^2 + 6x - 216 \end{cases}$ $\Delta = 36 + 864 = 900 = 30^2$

$x_1 = \frac{-6-\sqrt{30^2}}{2} = -18$ et $x_2 = \frac{-6+\sqrt{30^2}}{2} = 12$, la longueur étant positive seule 12 est considérée comme valeur valable. $(S) \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1152}{x} \\ x = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 96 \\ x = 12 \end{cases}$ Claire a donc acheté 12m de tissu à 96F/m

5- Renaud s'est rendu en voiture à 600 km de son domicile. Si sa vitesse avait été supérieure de 16 km/h, il aurait mis 1 heure et quart de moins pour arriver à destination. Quelle était sa vitesse moyenne ?

On sait que $\times t = d$, avec v en km/h, t en h et d en km ici on connait d mais pas v ni t, les informations peuvent se traduire par le système suivant :

$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} v \times t = 600 \\ (v+16)(t-1{,}25) = 600 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{600}{v} \\ (v+16)(t-1{,}25) = 600 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{600}{v} \\ (v+16)\left(\frac{600}{v} - 1{,}25\right) = 600 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{600}{v} \\ 600 - 1{,}25v + \frac{9600}{v} - 20 = 600 \end{cases}$

$600 - 1{,}25v + \frac{9600}{v} - 20 = 600 \Leftrightarrow 1{,}25v + 20 - \frac{9600}{v} = 0 \Leftrightarrow 1{,}25v^2 + 20v - 9600 = 0$

$\Delta = 400 + 48000 = 48400 = 220^2$

$v_1 = \frac{-20-\sqrt{220^2}}{2{,}5} = -96$ et $v_2 = \frac{-20+\sqrt{220^2}}{2{,}5} = 80$

Il a donc roulé à 80km/h

6- Un cycliste a parcouru une distance de 90 km. S'il avait parcouru 2 km de plus à l'heure, la durée du trajet aurait été diminuée d'une demi-heure. Calculer sa vitesse en km/h ?

On sait que $\times t = d$, avec v en km/h, t en h et d en km ici on connait d mais pas v ni t, les informations peuvent se traduire par le système suivant :

$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} v \times t = 90 \\ (v+2)(t-0{,}5) = 90 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{90}{v} \\ (v+2)(t-0{,}5) = 90 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{90}{v} \\ (v+2)\left(\frac{90}{v} - 0{,}5\right) = 90 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{90}{v} \\ 90 - 0{,}5v + \frac{180}{v} - 1 = 90 \end{cases}$

$90 - 0{,}5v + \frac{180}{v} - 1 = 90 \Leftrightarrow 0{,}5v + 1 - \frac{180}{v} = 0 \Leftrightarrow 0{,}5v^2 + v - 180 = 0$

$\Delta = 1 + 360 = 361 = 19^2$

$v_1 = \frac{-1-\sqrt{19^2}}{1} = -20$ et $v_2 = \frac{-1+\sqrt{19^2}}{1} = 18$

Il a donc roulé à 18km/h

7- A l' occasion d'une tombola, une somme de 20400€ doit être répartie également entre les gagnants. Deux de ces derniers ne se manifestant pas, la part de chacun est alors augmentée de 850€. Combien avait-on prévu de gagnants et combien chacun d'entre eux devait-il recevoir ?

Soit x le nombre de gagnant et y le prix que chacun devait recevoir.

$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x \times y = 20400 \\ (y+850)(x-2) = 20400 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{20400}{y} \\ (y+850)(x-2) = 20400 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{20400}{y} \\ (y+850)\left(\frac{20400}{y} - 2\right) = 20400 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{20400}{y} \\ 20400 - 2y + \frac{17340000}{y} - 1700 = 20400 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{20400}{y} \\ 0 = 2y^2 + 1700y - 17340000 \end{cases}$

Fiche d'exercice 1

$\Delta = 2890000 + 138720000 = 141610000 = 11900^2$

$y_1 = \frac{-1700-\sqrt{11900^2}}{4} = -3400$ et $y_2 = \frac{-1700+\sqrt{11900^2}}{4} = 2550$ or le cadeau est nécessairement positif donc y =2550

$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{20400}{y} \\ y = 2550 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 8 \\ y = 2550 \end{cases}$

Ils étaient donc 8 à gagner 2550€

8- ABCD est un rectangle tel que AB=10 et BC=3. E est un point de [AB].
Quelles sont les valeurs possibles de AE pour que le triangle DEC soit rectangle en E ?
(Indiquer une construction géométrique possible)
Géométriquement c'est facile , si DEC est rectangle en E, alors [DC] est le diamètre de son cercle circonscrit. Je tracerai donc le cercle de diamètre [DC], tout point de ce cercle formera avec D et C un triangle rectangle , je veux que E soit sur [AB] donc je prendrai , si elles existents, les intersections entre mon cercle et le segment [AB]
Analytiquement : soit x = AE, on a donc BE = 10 – x , $DE^2 = AD^2+AE^2=3^2+x^2$ et $CE^2 = BC^2+BE^2=3^2+(10-x)^2$
DEC est rectangle en D ⇔ $DC^2 = DE^2 + CE^2$ ⇔ $10^2=3^2+x^2+3^2+(10-x)^2$ ⇔ $100= 9+x^2+9+100-20x+x^2$
⇔ $0 = 2x^2 -20x +18$

$\Delta = 400 - 144 = 256 = 16^2$

$x_1 = \frac{20-16}{4} = 1$ et $x_2 = \frac{20+16}{4} = 9$

9- La somme des entiers naturels de 1 à *n* est égale à 1953. Calculer *n*.
1 + 2 + 3 + ... + n = 1953
n + n-1 + n-2 + ... + 1 = 1953

(1+n) + (1+n) + (1+n) + ...+ (1+n) = 3906
Donc n(1+n) = 3906 ⇔ $n^2 + n - 3906 = 0$

$\Delta = 1 + 15624 = 15625 = 125^2$

$n_1 = \frac{-1-125}{2} = -63$ et $n_2 = \frac{-1+125}{2} = 64$

n étant positif on aura nécessairement n = 64

10- Une pelouse a la forme d'un rectangle dont la longueur est le double de la largeur. Une allée de 3m de large entoure cette pelouse. Calculer la largeur de la pelouse, sachant que l'aire totale, pelouse et allée, est de 360 m^2.
Soit L la largeur de la pelouse, sa longueur est donc de 2L et donc la bordure extérieure de l'allée est un rectangle de dimension L+6 par 2L+6 et on a donc $(L+6)(2L+6) = 360$ ⇔ $2L^2 + 18L + 36 = 360$
⇔ $2L^2 + 18L - 324 = 0$ $\Delta = 324 + 2592 = 2916 = 54^2$

$n_1 = \frac{-18-54}{4} = -18$ et $n_2 = \frac{-18+54}{4} = 9$ La pelouse est donc un rectangle de 9m par 18m

A voir quand on s'occupera des suites.

11- *a*, *b* et *c* dans cet ordre, sont 3 termes consécutifs d'une suite arithmétique non constante; *b*, *c* et *a* dans cet ordre, sont 3 termes consécutifs d'une suite géométrique. De plus $a + b + c = 18$. Calculer *a*, *b* et *c*.

12- *a*, 7 et *b* sont trois termes consécutifs d'une suite géométrique dont la somme est égale à 77,7. Calculer *a*, et *b*.