Semaine du 16 Novembre

Ce document sera mis jour régulièrement sur le serveur Pronote comme sur mon site pédagogique, il vous faudra la télécharger de nouveau pour pouvoir utiliser ces mises à jour, et les instructions pour les heures/jours suivants.

Ce document est à associer à un autre où vous trouverez les corrections des exercices à faire (fiche qui sera, elle aussi, mise à jour régulièrement)

Lundi : Heures 1, 2 et 3

I. Limite en zéro d'une fonction

Exemple :

1) Soit la fonction f définie sur $]-\infty\,;0[\,\cup\,]0\,;\,+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{(x+1)^2-1}{x}$.

L'image de 0 par la fonction f n'existe pas. On s'intéresse cependant aux valeurs de $f(x)$ lorsque x se rapproche de 0.

x	-0,5	-0,1	-0,01	-0,001	…	0,001	0,01	0,1	0,5
$f(x)$	1,5	1,9	1,99	1,999	?	2,001	2,01	2,1	2,5

On constate que $f(x)$ se rapproche de 2 lorsque x se rapproche de 0.

On dit que la limite de f lorsque x tend vers 0 est égale à 2 et on note : $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=2$.

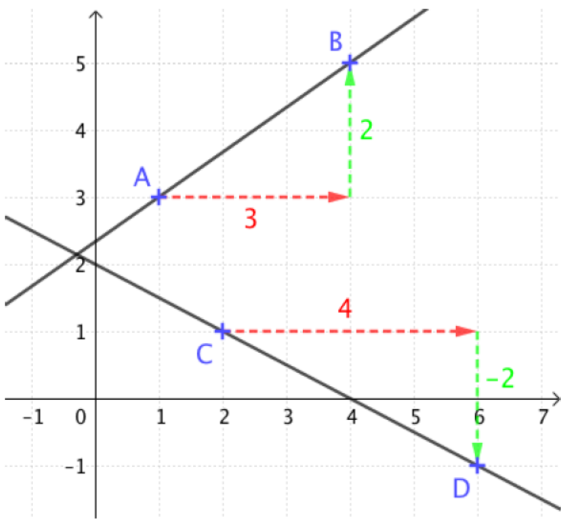
Correction du DM (**document à télécharger**)

De là on revient sur les équations de droite, et plus particulièrement leur coefficient directeur

Le taux de variation vu lors du chapitre précédent n'est rien d'autre que le coefficient directeur de la droite passant par les deux points de la courbe.

II. Nombre dérivé

1) Rappel : Coefficient directeur d'une droite



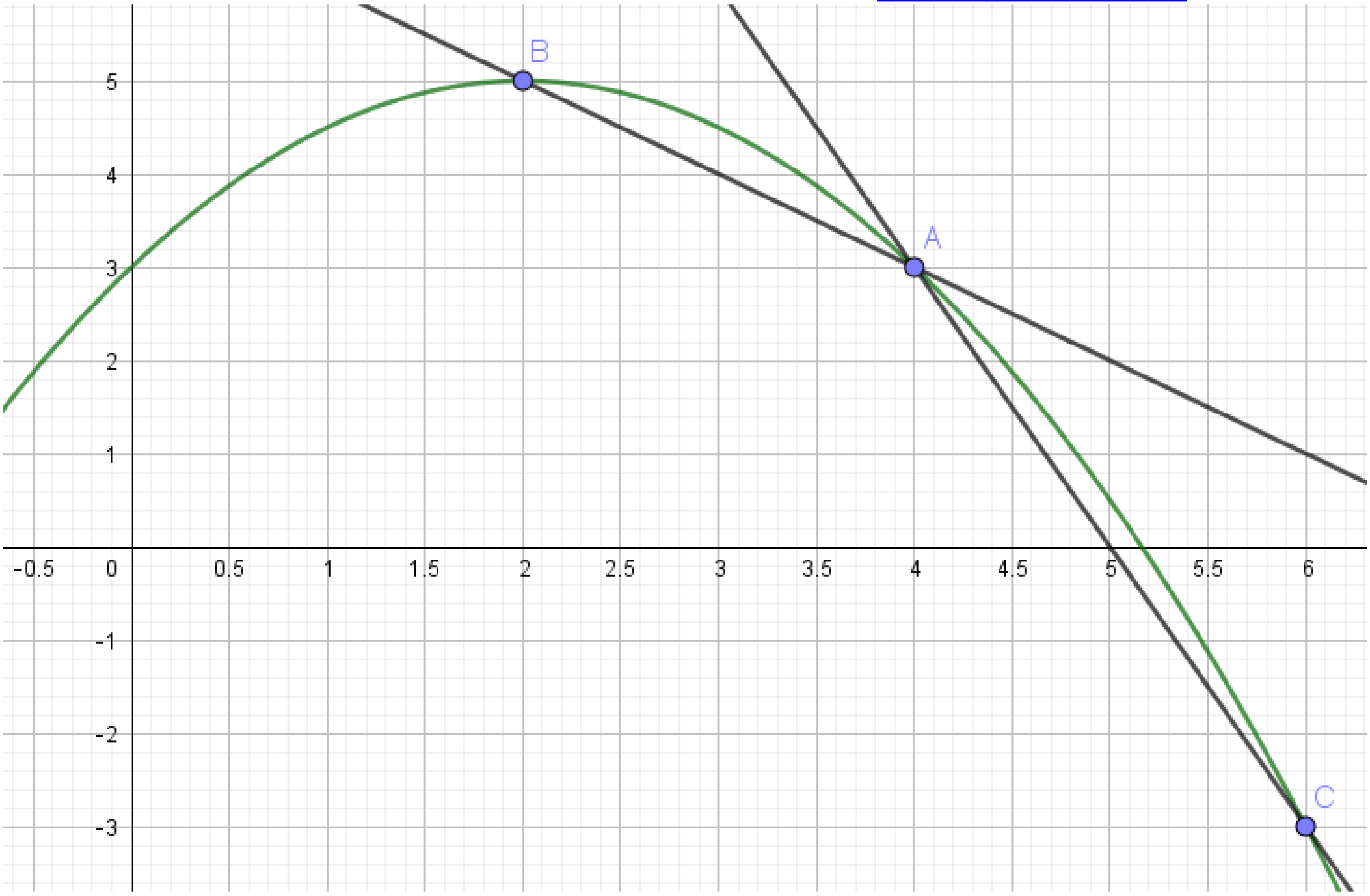
Le coefficient directeur de la droite (AB) est égal à :

$$\frac{5-3}{4-1}=\frac{2}{3}$$

Le coefficient directeur de la droite (CD) est égal à :

$$\frac{-1-1}{6-2}=\frac{-2}{4}=-\frac{1}{2}$$

De là on s'intéresse au lien entre taux de variation $\tau(a;a+h)$ / évolution moyenne d'un côté et dérivée / évolution instantanée. Et donc on va utiliser la notion de limite



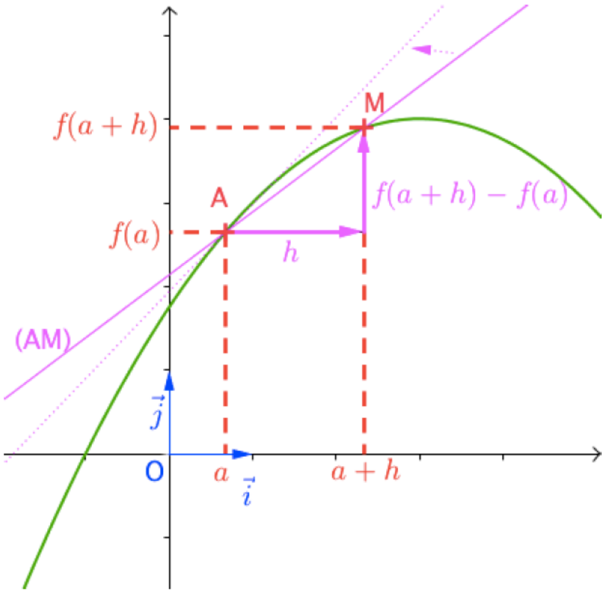
Ici on a tracé la courbe représentative de la fonction f qui à tout réel x associe le réel $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 3$
A, B et C sont les points de la courbe ayant respectivement pour abscisse 4,2 et 6.
$A\big(4; f(4)\big) = A(4;3)$ et $B\big(2; f(2)\big) = B(2;5)$
$\tau(2;4) = \frac{f(4)-f(2)}{4-2} = \frac{3-5}{4-2} = \frac{-2}{2} = -1$
Si on veut calculer le coefficient directeur de (AB) on fait : $\frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{3-5}{4-2} = \frac{-2}{2} = -1$
On a bien la même valeur
A titre de rappel, avoir comme coefficient directeur -1 ça veut dire que si on part d'un point de la droite (AB) et qu'on avance d'une unité, pour rester sur la droite il nous faut descendre de 1 (un coefficient négatif veut dire une descente et un coefficient positif veut dire une montée)

On peut voir qu'entre A et B la courbe et la droite se ressemblent, leur écart est minime.
En termes d'évolution par moment la courbe verte descend plus vite que la droite par moment elle descend moins vite, mais les deux s'équilibrent : entre A et B en moyenne la courbe descend aussi vite que la droite.
Idem entre A et C.

On fera les exercices 19 et 20 P112 en s'appuyant sur les exercices résolus page 105 et de la vidéo :
https://youtu.be/UmT0Gov6yyE

Passage de la vitesse moyenne à la vitesse instantanée
Pour faire une mesure de vitesse moyenne, on lance le chrono à un moment puis on l'arrête à un autre, et on divise la distance parcourue (autrement dit la différence entre la position d'arrivée et celle de départ) par le temps écoulé.
Si on veut gagner en précision on va prendre des temps aussi courts que possible, et plus le temps écoulé est court plus on va se rapprocher de la vitesse instantanée.

2) Fonction dérivable



Soit une fonction f.
Soit A et M deux points de la courbe représentative de f d'abscisses respectives a et $a+h$.
Le coefficient directeur de la droite (AM) est égal à :
$\frac{f(a+h)-f(a)}{a+h-a} = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

Lorsque le point M se rapproche du point A, le coefficient directeur de la droite (AM) est égal à la limite de $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ lorsque h tend vers 0.
Ce coefficient directeur s'appelle le nombre dérivé de f en a et on le note $f'(a)$.

Le **nombre dérivé** de f en a est :

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Pour bien comprendre comment on peut appliquer ça dans des exercices Il faut regarder la vidéo :
https://youtu.be/UmT0Gov6yyE

après avoir regardé l'exemple suivant il vous faudra déterminer $f'(-2) = -2$

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 2x - 3$.
Calculer le nombre dérivé de la fonction f en $x = 2$.

- On commence par calculer $\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$:

$$\frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \frac{(2+h)^2+2(2+h)-3-2^2-2\times 2+3}{h}$$

$$= \frac{4+4h+h^2+4+2h-8}{h}$$

$$= \frac{6h+h^2}{h} = \frac{h(6+h)}{h} = 6+h$$

- On calcule la limite de $\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$ lorsque h tend vers 0 :

Donc : $\lim_{h\to 0} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim_{h\to 0} 6+h = 6$

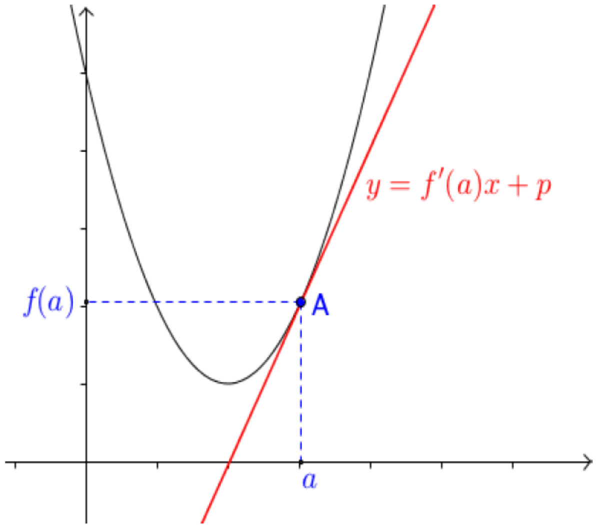
Le nombre dérivé de f en 2 est égal à 6. Et on note $f'(2) = 6$.

Exercices 18 et 20 P 112

III. Tangente à une courbe

1) Coefficient directeur de la tangente

A est un point d'abscisse a appartenant à la courbe représentative d'une fonction f.



Définition : La **tangente** à la courbe au point A d'abscisse a est la droite :

- passant par A,
- de coefficient directeur le nombre dérivé $f'(a)$.

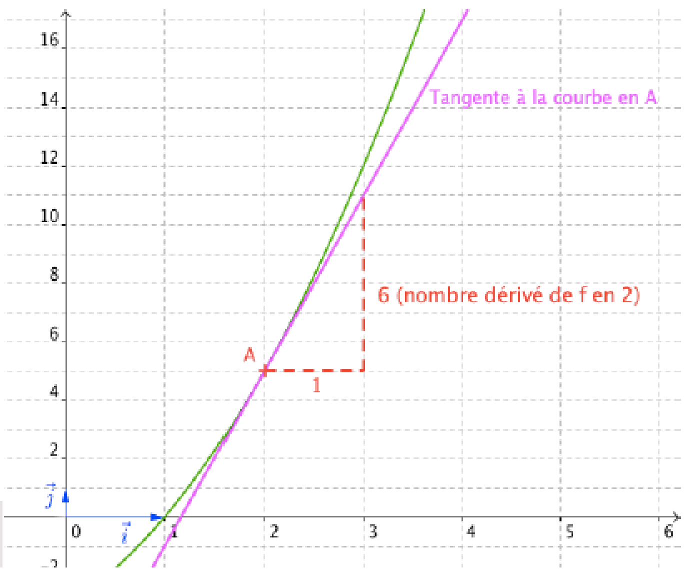
Regarder la Vidéo **https://youtu.be/0jhxK55jONs**
Puis lire l'exemple

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 2x - 3$ dont le nombre dérivé en 2 a été calculé plus haut.
1) Déterminer le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de f au point A de la courbe d'abscisse 2.
2) a) En s'aidant de la calculatrice graphique, reproduire la courbe de la fonction f.
b) Construire la tangente à la courbe de la fonction en 2.

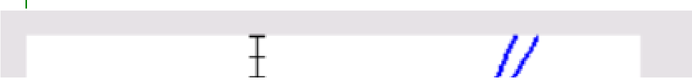
1) On a vu dans le paragraphe I. que le nombre dérivé de f en 2 est égal à 6.
Ainsi la tangente à la courbe représentative de f au point A de la courbe d'abscisse 2 est la droite passant par A et de coefficient directeur 6.

2) - On commence par placer le point A de coordonnées (2 ; f(2)), avec
$f(2) = 2^2 + 2 \times 2 - 3 = 5$.

- On trace la tangente passant par A et de coefficient directeur 6.
Pour cela, on avance de 1 dans le sens des abscisses puis de 6 dans le sens des ordonnées.



Une fois la courbe tracée sur la calculatrice, on peut afficher la tangente.
Pour cela, saisir :



Cet exemple servira à faire les exercices 23 et 25 P 112

Ce qui n'a pas été terminé durant les heures de cours sera à faire pour la semaine prochaine