Nom & Prénom : ……………………………………………………… www.dimension-k.com

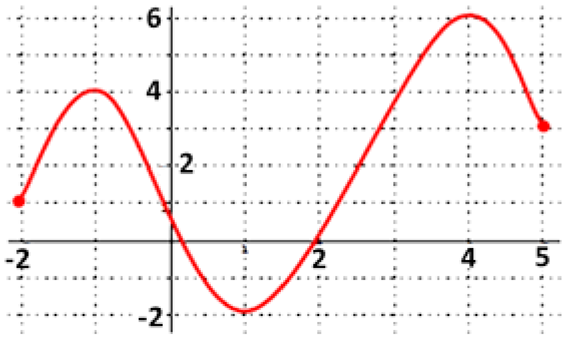
Interrogation STL (sujet A)

Exercice 1

Soit f la fonction définie sur R^* par $f(x) = \frac{5x-7}{x^2}$

1) Prouver que $f'(x) = \frac{-5x+14}{x^3}$
2) Faire le tableau de variations de f
3) Donner l'équation de T_3 la tangente à C_f en $a = 3$. Cette droite est-elle montante ou descendante ?

Exercice 2



Faire le tableau de variations de g (la fonction représentée ci-dessus) et dans le même tableau déduire les signes de g'

x	-2 5
$g(x)$	
$g'(x)$	

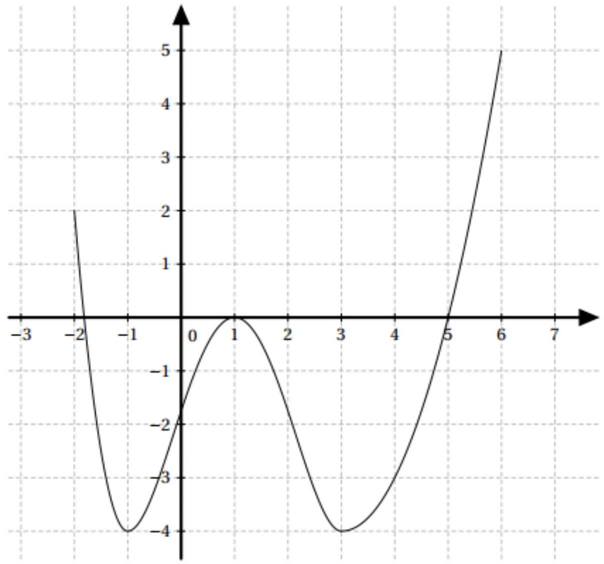
Nom & Prénom : ……………………………………………………… www.dimension-k.com

Interrogation STL (sujet B)

Exercice 1

Soit f la fonction définie sur $R - \left\{\frac{7}{3}\right\}$ par $f(x) = \frac{x^2}{(7-3x)}$

1) Prouver que $f'(x) = \frac{x(14-3x)}{(7-3x)^2}$
2) Faire le tableau de variations de f
3) Donner l'équation de T_2 la tangente à C_f en $a = 2$. Cette droite est-elle montante ou descendante ?



Exercice 2

Faire le tableau de variations de g (la fonction représentée ci-dessus) et dans le même tableau déduire les signes de g'

x	-2 6
$g(x)$	
$g'(x)$	

Exercice 3

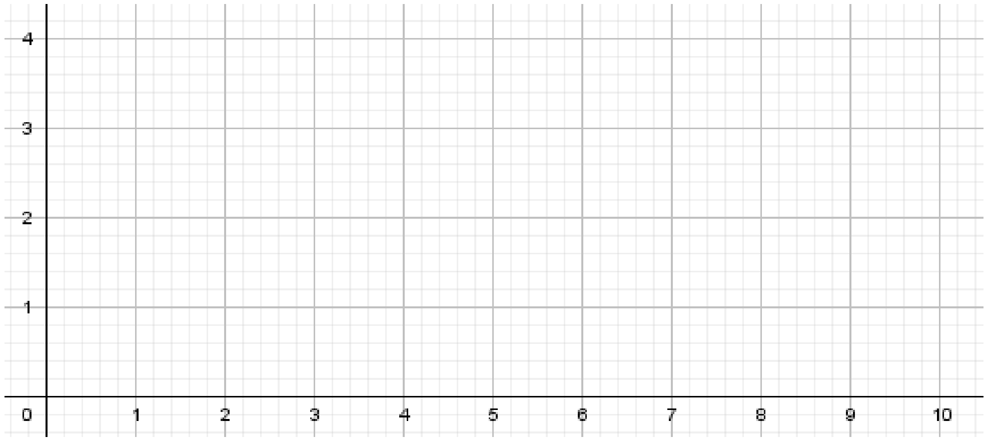
On injecte un antibiotique à un patient. On modélise la situation par une fonction c qui, à tout temps t, exprimé en heures, écoulé depuis l'injection, associe la concentration, exprimée en $mg.L^{-1}$ de l'antibiotique dans le sang du patient.

Cette fonction c est définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par $c(t)=\frac{8t}{t^2+1}$.

1. On note c'la fonction dérivée de la fonction c.
   a. Déterminer c'.
   b. A l'aide de votre calculatrice représenter la fonction c , (on pourra utiliser plutôt la formulation $f(x)=\frac{8x}{x^2+1}$) puis la représenter dans le repère ci-dessous.
   c. Au bout de combien de temps après l'injection la concentration de l'antibiotique est-elle maximale ? Préciser cette concentration maximale en $mg.L^{-1}$.
2. En antibiothérapie, on définit la CMI comme la concentration minimale d'antibiotique permettant d'empêcher la multiplication bactérienne. La CMI de l'antibiotique injecté est égale à 2,4$mg.L^{-1}$.

   On admettra que $c(t)-2{,}4=\frac{-2{,}4(t-3)\left(t-\frac{1}{3}\right)}{t^2+1}$
   a. Etudier le signe de cette expression sur l'intervalle $[0;+\infty[$
   b. Montrer que la concentration de l'antibiotique injecté est supérieure à sa CMI pendant 2 h 40.

Bonus : prouver que $c(t)-2{,}4=\frac{-2{,}4(t-3)\left(t-\frac{1}{3}\right)}{t^2+1}$



Exercice 3

On injecte un antibiotique à un patient. On modélise la situation par une fonction c qui, à tout temps t, exprimé en heures, écoulé depuis l'injection, associe la concentration, exprimée en $mg.L^{-1}$ de l'antibiotique dans le sang du patient.

Cette fonction c est définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par $c(t)=\frac{4t}{t^2+1}$.

1. On note c'la fonction dérivée de la fonction c.
   a. Déterminer c'.
   b. A l'aide de votre calculatrice représenter la fonction c , (on pourra utiliser plutôt la formulation $f(x)=\frac{4x}{x^2+1}$) puis la représenter dans le repère ci-dessous.
   c. Au bout de combien de temps après l'injection la concentration de l'antibiotique est-elle maximale ? Préciser cette concentration maximale en $mg.L^{-1}$.
2. En antibiothérapie, on définit la CMI comme la concentration minimale d'antibiotique permettant d'empêcher la multiplication bactérienne. La CMI de l'antibiotique injecté est égale à 1,2$mg.L^{-1}$.

   On admettra que $c(t)-1{,}2=\frac{-1{,}2(t-3)\left(t-\frac{1}{3}\right)}{t^2+1}$
   a. Etudier le signe de cette expression sur l'intervalle $[0;+\infty[$
   b. Montrer que la concentration de l'antibiotique injecté est supérieure à sa CMI pendant 2 h 40.

Bonus : prouver que $c(t)-1{,}2=\frac{-1{,}2(t-3)\left(t-\frac{1}{3}\right)}{t^2+1}$

Corrections

Sujet A

Je reconnais $uv \to \frac{u'v-uv'}{v^2}$ avec $u = 5x-7$, $v = x^2$, $u' = 5$ et $v' = 2x$

On aura donc $f'(x) = \frac{5x^2-(5x-7)2x}{(x^2)^2} = \frac{5x^2-(10x^2-14x)}{x^4} = \frac{5x^2-10x^2+14x}{x^4} = \frac{(-5x+14)x}{x^4} = \frac{-5x+14}{x^3}$

$-5x+14 \geq 0 \Leftrightarrow -5x \geq -14 \Leftrightarrow x \leq \frac{-14}{-5} \Leftrightarrow x \leq 2{,}8$

x	$-\infty$		0		$2{,}8$		$+\infty$
$-5x+14$		+		+	0	-	
x^3		-	0	+		+	
$f'(x)$		-	||	+	0	-	
$f(x)$		$\searrow$	||	$\nearrow$	$\frac{25}{28}$	$\searrow$	

$T_2 : y = f'(a)(x-a) + f(a) \quad \Leftrightarrow \quad y = f'(3)(x-3) + f(3)$

Or $f(3) = \frac{5\times 3-7}{3^2} = \frac{8}{9}$ et $f'(3) = \frac{-5\times 3+14}{3^3} = -\frac{1}{27}$ et donc :

$T_2 : y = -\frac{1}{27}(x-3) + \frac{8}{9} \Leftrightarrow y = -\frac{1}{27}x + \frac{3}{27} + \frac{8}{9} \Leftrightarrow y = -\frac{1}{27}x + \frac{1}{9} + \frac{8}{9} \Leftrightarrow y = -\frac{1}{27}x + \frac{9}{9}$

$\Leftrightarrow y = -\frac{1}{27}x + 1$ le coefficient directeur étant négatif cette droite est descendante

x	-2		-1		1		4		5
$g(x)$	1	$\nearrow$	4	$\searrow$	-2	$\nearrow$	6	$\searrow$	3
$g'(x)$		+	0	-	0	+	0	-	

Sujet B $\frac{x^2}{(7-3x)}$

Je reconnais $uv \to \frac{u'v-uv'}{v^2}$ avec $u = x^2$, $v = 7-3x$, $u' = 2x$ et $v' = -3$

On aura donc $f'(x) = \frac{2x(7-3x)-x^2(-3)}{(7-3x)^2} = \frac{14x-6x^2+3x^2}{(7-3x)^2} = \frac{x(14-3x)}{(7-3x)^2}$

$14-3x \geq 0 \Leftrightarrow -3x \geq -14 \Leftrightarrow x \leq \frac{-14}{-3} \Leftrightarrow x \leq \frac{14}{3}$

$x \geq 0 \qquad 7-3x \geq 0 \Leftrightarrow -3x \geq -7 \Leftrightarrow x \leq \frac{-7}{-3} \Leftrightarrow x \leq \frac{7}{3}$

x	$-\infty$		0		$\frac{7}{3}$		$\frac{14}{3}$		$+\infty$
x		-	0	+		+		+	
$14-3x$		+		+		+	0	-	
$(7-3x)^2$		+		+	0	+		+	
$f'(x)$		-	0	+	||	+	0	-	
$f(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	||	$\nearrow$	$-\frac{28}{9}$	$\searrow$	

$T_2 : y = f'(a)(x-a) + f(a) \quad \Leftrightarrow \quad y = f'(2)(x-2) + f(2)$

Or $f(2) = \frac{2^2}{7-3\times 2} = 4$ et $f'(2) = \frac{2(14-3\times 2)}{(7-3\times 2)^2} = 16$ et donc :

$T_2 : y = 16(x-2) + 4 \Leftrightarrow y = 16x - 32 + 4 \Leftrightarrow y = 16x - 28$

le coefficient directeur étant positif cette droite est croissante

x	-2		-1		1		3		6
$g(x)$	2	$\searrow$	-4	$\nearrow$	0	$\searrow$	-4	$\nearrow$	5
$g'(x)$		-	0	+	0	-	0	+	

Exercice 3

1. On reconnait $\frac{u}{v} \to \frac{u'v-uv\prime}{v^2}$.
   a. avec $u = 8t$, $v = t^2+1$, $u' = 8$ et $v' = 2t$.

Ainsi $c'(t) = \frac{8(t^2+1)-8t2t}{(t^2+1)^2} = \frac{8[(t^2+1)-t^2 2]}{(t^2+1)^2} = \frac{8[(t^2+1)-t^2 2]}{(t^2+1)^2} = \frac{8[1-t^2]}{(t^2+1)^2} = \frac{8(1-t)(1+t)}{(t^2+1)^2}$

b.

t	0		1		$+\infty$
8		+		+	
$1-t$		+	0	-	
$1+t$		+		+	
$(t^2+1)^2$		+		+	
$c'(t)$		+	0	-	
$c(t)$	0	↗	4	↘	

.

c. 1h et la concentration sera de $4mg.L^{-1}$.

2. .
   a. $c(t) - 2{,}4 = \frac{8t}{t^2+1} - 2{,}4 = \frac{8t}{t^2+1} - \frac{2{,}4(t^2+1)}{t^2+1} = \frac{8t}{t^2+1} - \frac{2{,}4t^2+2{,}4}{t^2+1}$
   $= \frac{-2{,}4t^2+8t-2{,}4}{t^2+1}$ De plus : $\frac{-2{,}4(t-3)\left(t-\frac{1}{3}\right)}{t^2+1} = \frac{-2{,}4\left(t^2-\frac{t}{3}-3t+1\right)}{t^2+1}$
   $= \frac{-2{,}4t^2+2{,}4\frac{t}{3}+2{,}4\times 3t-2{,}4}{t^2+1} = \frac{-2{,}4t^2+0{,}8t+7{,}2t-2{,}4}{t^2+1}$
   $= \frac{-2{,}4t^2+8t-2{,}4}{t^2+1} = c(t)$

b.

t	0		$\frac{1}{3}$		3		$+\infty$
$-2{,}4$		-		-		-	
$t-3$		-		-	0	+	
$t-\frac{1}{3}$		-	0	+		+	
t^2+1		+		+		+	
$c(t)-2{,}4$		-	0	+	0	-	

c. On peut voir ici que la concentration est supérieure entre $\frac{1}{3}h$ et 3h donc durant $3 - \frac{1}{3} = \frac{8}{3} = 2 + \frac{2}{3} = 2h + 40min$.

Exercice 3

1. On reconnait $\frac{u}{v} \to \frac{u'v-uv\prime}{v^2}$.
   a. avec $u = 4t$, $v = t^2+1$, $u' = 4$ et $v' = 2t$.

Ainsi $c'(t) = \frac{4(t^2+1)-4t2t}{(t^2+1)^2} = \frac{4[(t^2+1)-t^2 2]}{(t^2+1)^2} = \frac{4[(t^2+1)-t^2 2]}{(t^2+1)^2} = \frac{4[1-t^2]}{(t^2+1)^2} = \frac{4(1-t)(1+t)}{(t^2+1)^2}$

b.

t	0		1		$+\infty$
4		+		+	
$1-t$		+	0	-	
$1+t$		+		+	
$(t^2+1)^2$		+		+	
$c'(t)$		+	0	-	
$c(t)$	0	↗	2	↘	

.

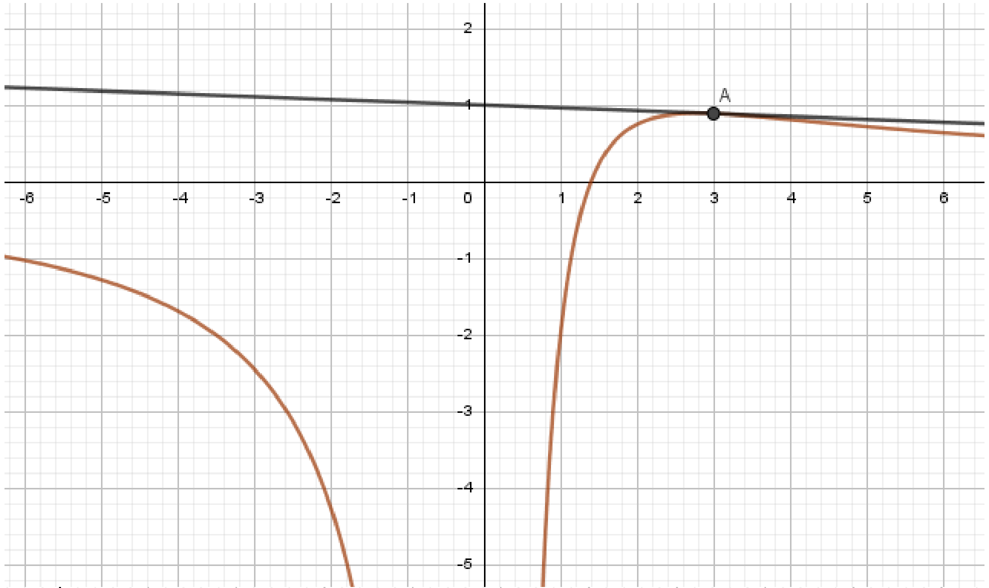
c. 1h et la concentration sera de $2mg.L^{-1}$.

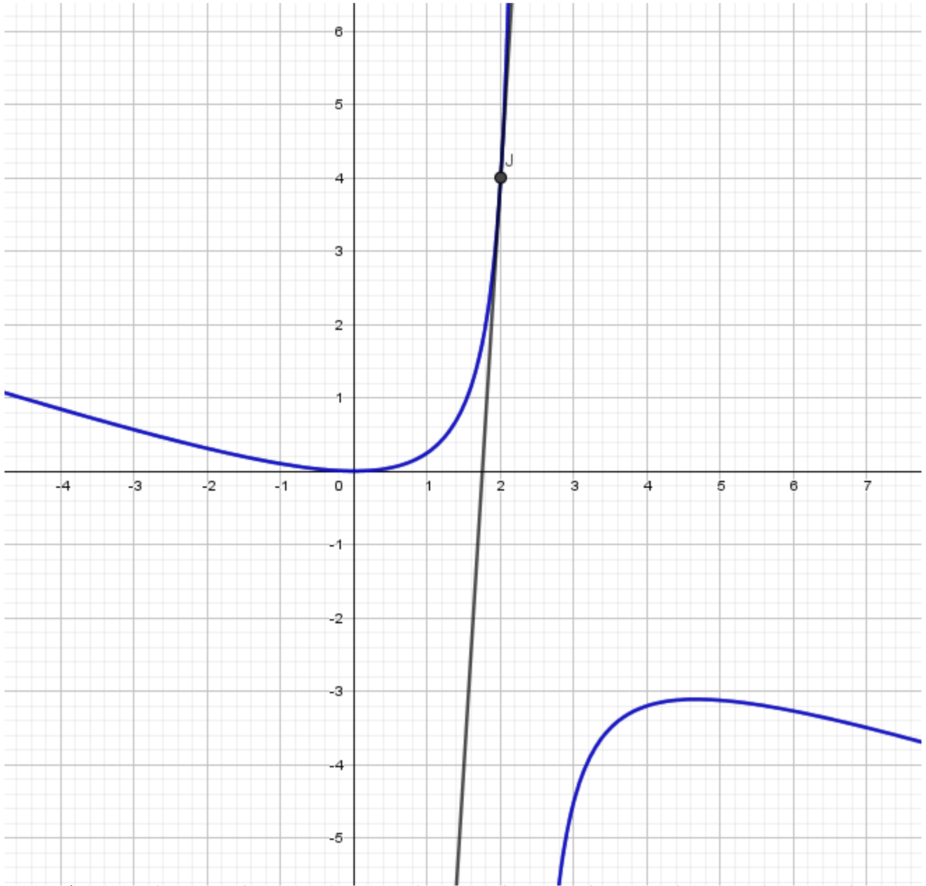
2. .
   a. $c(t) - 1{,}2 = \frac{4t}{t^2+1} - 1{,}2 = \frac{4t}{t^2+1} - \frac{1{,}2(t^2+1)}{t^2+1} = \frac{4t}{t^2+1} - \frac{1{,}2t^2+1{,}2}{t^2+1}$
   $= \frac{-2{,}4t^2+8t-2{,}4}{t^2+1}$ De plus : $\frac{-2{,}4(t-3)\left(t-\frac{1}{3}\right)}{t^2+1} = \frac{-2{,}4\left(t^2-\frac{t}{3}-3t+1\right)}{t^2+1}$
   $= \frac{-1{,}2t^2+1{,}2\frac{t}{3}+1{,}2\times 3t-1{,}2}{t^2+1} = \frac{-1{,}2t^2+0{,}4t+3{,}6t-1{,}2}{t^2+1}$
   $= \frac{-1{,}2t^2+4t-1{,}2}{t^2+1} = c(t)$

b.

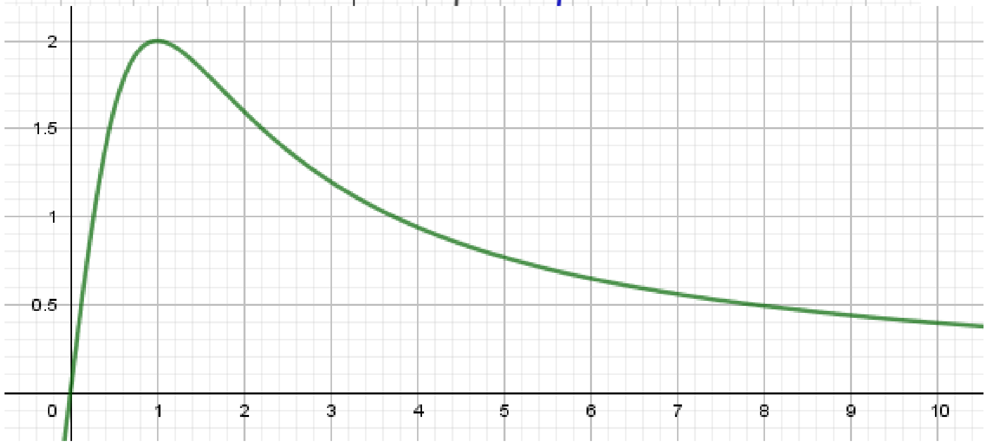
t	0		$\frac{1}{3}$		3		$+\infty$
$-1{,}2$		-		-		-	
$t-3$		-		-	0	+	
$t-\frac{1}{3}$		-	0	+		+	
t^2+1		+		+		+	
$c(t)-1{,}2$		-	0	+	0	-	

c. On peut voir ici que la concentration est supérieure entre $\frac{1}{3}h$ et 3h donc durant $3 - \frac{1}{3} = \frac{8}{3} = 2 + \frac{2}{3} = 2h + 40min$.


A
2
1
-1
-2
-3
-4
-5
-6 -5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6


J
6
5
4
3
2
1
-1
-2
-3
-4
-5
-4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6 7


4
3
2
1
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10


2
1.5
1
0.5
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

x	$-\infty$		0		$2{,}8$		$+\infty$
$-5x+14$		+		+	0	-	
x^3		-	0	+		+	
$f'(x)$		-	||	+	0	-	
$f(x)$			||		$\frac{25}{28}$		

x	$-\infty$		0		$\frac{7}{3}$		$\frac{14}{3}$		$+\infty$
x		-		+		+	0	+	
$14-3x$		+		+		+		-	
$(7-3x)^2$		+		+	0	+		+	
$f'(x)$		-	0	+	||	+	0	-	
$f(x)$			0		||		$-\frac{28}{9}$		

x	-2		-1		1		4		5
$g(x)$	1		4		-2		6		3
$g'(x)$		+	0	-	0	+	0	-	

x	-2		-1		1		3		6
$g(x)$	2		-4		0		-4		5
$g'(x)$		-	0	+	0	-	0	+	

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
8		+		+		+	
$1-t$		+		+	0	-	
$1+t$		-	0	+		+	
$(t^2+1)^2$		+		+		+	
$f'(x)$		-	0	+	0	-	
$f(x)$			-4		4		

x	0		1		$+\infty$
8		+		+	
$1-t$		+	0	-	
$1+t$		+		+	
$(t^2+1)^2$		+		+	
$c'(x)$		+	0	-	
$c(x)$	0		4		

t	0		$\frac{1}{3}$		3		$+\infty$
$-1{,}2$		-		-		-	
$t-3$		-		-	0	+	
$t-\frac{1}{3}$		-	0	+		+	
t^2+1		+		+		+	
$c(t)-1{,}2$		-	0	+	0	-	

Exercice 3 (version originale)

On injecte un antibiotique à un patient. On modélise la situation par une fonction c qui, à tout temps t, exprimé en heures, écoulé depuis l'injection, associe la concentration, exprimée en $mg.L^{-1}$ de l'antibiotique dans le sang du patient.

Cette fonction c est définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par $c(t) = \frac{8t}{t^2+1}$.

1. On note c'la fonction dérivée de la fonction c.
    a. Montrer que pour tout réel t positif ou nul, $c'(t) = \frac{8(1-t)(1+t)}{(t^2+1)^2}$.
    b. Etudier le signe de c' sur $[0; +\infty[$ et en déduire le tableau de variation de c.
    c. Au bout de combien de temps après l'injection la concentration de l'antibiotique est-elle maximale ? Préciser cette concentration maximale en $mg.L^{-1}$.
2. En antibiothérapie, on définit la CMI comme la concentration minimale d'antibiotique permettant d'empêcher la multiplication bactérienne. La CMI de l'antibiotique injecté est égale à 2,4$mg.L^{-1}$.

   On admettra que $c(t) - 2{,}4 = \frac{-2{,}4(t-3)\left(t-\frac{1}{3}\right)}{t^2+1}$
    a. Etudier le signe de cette expression sur l'intervalle $[0; +\infty[$
    b. Montrer que la concentration de l'antibiotique injecté est supérieure à sa CMI pendant 2 h 40.

Bonus : prouver que $c(t) - 2{,}4 = \frac{-2{,}4(t-3)\left(t-\frac{1}{3}\right)}{t^2+1}$