Dérivation

Travail à la maison pour les élèves en distanciel (semaines du 22 et 29 mars)

Travail à faire :
Commencer par reprendre le cours dérivée 1, et s'assurer que vous êtes capable de refaire l'intégralité du contrôle.
L'essentiel des formules sont sur la page 238 du livre
Exercices : 2,3,4, 6, 9,11, 14,15 17P239 et 46P241

Travail à la maison pour les élèves en distanciel (semaines du 5 et 12 avril)

Travail à faire :
Exercices : 10,13,18,26,28,47,48 et 49 P 239 et suivantes

Correction

Exercice 2P239
a. $f(x) = -5$
b. $g(x) = 2$
c. $h(x) = \frac{3}{2}$
d. $u(x) = \sqrt{3}$

Exercice 3P239
a. $f(x) = 4x - 3$
b. $h(x) = 2x - 4$
c. $u(x) = x - 7$
d. $v(x) = -6x + \frac{1}{2}$

Exercice 4P239
a. $u(x) = 3x^2 - 12x + 3$
b. $v(x) = 12t^2 - 7$

Exercice 5P239
Attention pour cet exercice on ne peut utiliser les formules de base sur le cosinus et le sinus, il faudra regarder dans le tableau sur les fonctions composées.
a. $f(t) = -2\ \times 3\cos(3t) = -6\cos(3t)$
b. $g(t) = 3(-2\cos(2t + \pi)) = -6\cos(2t + \pi)$

Exercice 6P239
$f'(x) = 2x$ et donc $f'(-0{,}5) = 2(-0{,}5) = -1$
Le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de f en -0,5 est de -1
La fonction f est décroissante en -0,5

Exercice 9P239
a. $f'(x) = -\sin(x)$ et $g'(x) = \cos(x)$
$f'(\pi) = -\sin(\pi) = -0$ et $g'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$
b. quand une dérivée est nulle ça veut dire que la tangente correspondante a un coefficient directeur nul, autrement dit qu'elle est horizontale. Ainsi les courbes des fonctions cosinus et sinus admettent des tangentes horizontales au niveau de leur points d'abscisses respectives : π et $\frac{\pi}{2}$

Exercice 10P239

a. $f'(t) = 3(-2\sin(2t+\pi)) = -6\sin(2t+\pi)$ et $g'(t) = 2\left(3\cos\left(3t+\frac{\pi}{2}\right)\right) = 6\left(3t+\frac{\pi}{2}\right)$

Exercice 11P239

1) $f'(x) = 2x$
2) L'approximation affine de $f(1+h)$ est obtenue à l'aide de l'équation de la tangente à la courbe représentative de C_f au point d'abscisse 1. $y = f'(a)(x-a) + f(a)$
   Or ici $f'(1) = 2 \times 1 = 2$ et $f(1) = 1^2$ donc la tangente a pour équation $y = 2(x-1)+1$
   On aura donc pour des x très proche de 1 $f(x) \approx 2(x-1)+1$ et donc $f(1+h) \approx 2(1+h-1)+1 \approx 2h+1$
3) $f(1{,}024) = f(1+0{,}024) \approx 2 \times 0{,}024 + 1 = 1{,}048$ (la vraie valeur était : 1,048576)
4) $f(0{,}999) = f\big(1+(-0{,}001)\big) \approx 2(-0{,}001)+1 = 0{,}998$ (la vraie valeur est 0,998001)

Exercice 12P239

1) $f'(x) = 3x^2$
2) L'approximation affine de $f(1+h)$ est obtenue à l'aide de l'équation de la tangente à la courbe représentative de C_f au point d'abscisse 1. $y = f'(a)(x-a) + f(a)$
   Or ici $f'(1) = 3 \times 1^2 = 3$ et $f(1) = 1^2$ donc la tangente a pour équation $y = 3(x-1)+1$
   On aura donc pour des x très proche de 1 $f(x) \approx 3(x-1)+1$ et donc $f(1+h) \approx 3(1+h-1)+1 \approx 3h+1$
3) $f(1{,}01) = f(1+0{,}01) \approx 3 \times 0{,}01 + 1 = 1{,}03$ (la vraie valeur était : 1,030301)
4) $f(0{,}99) = f\big(1+(-0{,}01)\big) \approx 3(-0{,}01)+1 = 0{,}97$ (la vraie valeur est 0,970299)

Exercice 13P239

1) $\frac{dS}{dR} = \pi 2R$ donc $dS = \pi 2R\, dR$
2) $S = \pi R^2 = \pi\left(\frac{D}{2}\right)^2 = \frac{\pi D^2}{4}$ donc $\frac{dS}{dD} = \frac{\pi 2D}{4} = \frac{\pi D}{2}$ ainsi $dS = \frac{\pi D}{2} dD$

Exercice 14P239

a. $w'(x) = 4x^3 - 7(2x) = 4x^3 - 14x$

b. $f'(x) = \frac{3}{2}(4x^3) + \frac{1}{3}(3x^2) - \frac{1}{4}(2x) + 3 = 6x^3 + x^2 - \frac{1}{2}x + 3$

Exercice 15P239

a. $h'(x) = 2x + \frac{-1}{x^2} = 2x - \frac{1}{x^2}$

b. $g'(x) = 2\left(\frac{-1}{x^2}\right) = \frac{-2}{x^2}$

Exercice 16P239

a. $v'(x) = -3\sin(x)$

b. $w'(x) = -2\cos(x)$

Exercice 17P239

a. Je reconnais $(uv)' = u'v + uv'$ avec $u = 2x-1$, $u' = 2$, $v = x+4$ et $v' = 1$
   Ainsi $f'(x) = 2(x+4) + (2x-1)1 = 2x+8+2x-1 = 4x+7$

b. Je reconnais $(uv)' = u'v + uv'$ avec $u = x$, $u' = 1$, $v = 5-3x$ et $v' = -3$
   Ainsi $g'(x) = 1(5-3x) + x(-3) = 5-3x-3x = -6x+5$

Exercice 18P239

a. $f(x) = \frac{-1}{x+1}$, je reconnais $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$ avec $u = -1$, $u' = 0$, $v = x+1$ et $v' = 1$
   Ainsi $f'(x) = \frac{0(x+1)-(-1)1}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2}$

b. $g(x) = \frac{5}{3-x}$, je reconnais $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$ avec $u = 5$, $u' = 0$, $v = 3-x$ et $v' = -1$
   Ainsi $g'(x) = \frac{0(3-x)-5(-1)}{(3-x)^2} = \frac{5}{(3-x)^2}$

Exercice 19P239

a. $f(x) = \frac{2x-1}{3x+1}$, je reconnais $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$ avec $u = 2x-1$, $u' = 2$, $v = 3x+1$ et $v' = 3$

Ainsi $f'(x) = \frac{2(3x+1)-(2x-1)3}{(3x+1)^2} = \frac{6x+2-(6x-3)}{(3x+1)^2} = \frac{6x+2-6x+3}{(3x+1)^2} = \frac{5}{(3x+1)^2}$

b. $g(x) = \frac{3x+1}{2x-4}$, je reconnais $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$ avec $u = 3x+1$, $u' = 3$, $v = 2x-4$ et $v' = 2$

Ainsi $g'(x) = \frac{3(2x-4)-(3x+1)2}{(2x-4)^2} = \frac{6x-12-(6x+2)}{(2x-4)^2} = \frac{6x-12-6x-2}{(2x-4)^2} = \frac{-14}{(2x-4)^2}$

Exercice 26P240

$f(x) = (x+3)^4$, je reconnais $(u^n)' = n\,u'\,u^{n-1}$ avec $u = x+3$ et $u' = 1$

Ainsi $f'(x) = 4 \times 1 \times (x+1)^3 = 4(x+1)^3$

Exercice 28P240

a. $g(x) = (3x-1)^4$, je reconnais $(u^n)' = n\,u'\,u^{n-1}$ avec $u = 3x-1$ et $u' = 3$

Ainsi $g'(x) = 4 \times 3 \times (3x-1)^3 = 12(3x-1)^3$

b. $g(x) = (2-3x)^5$, je reconnais $(u^n)' = n\,u'\,u^{n-1}$ avec $u = 2-3x$ et $u' = -3$

Ainsi $g'(x) = 5 \times (-3) \times (2-3x)^4 = -15(2-3x)^4$

Exercice 46P241

1. $f'(x) = 2x+3$
2. Etude du signe de f' , $f(x) \geq 0 \Leftrightarrow 2x+3 \geq 0 \Leftrightarrow 2x \geq -3 \Leftrightarrow x \geq -\frac{3}{2}$ donc f' est négative avant $-\frac{3}{2}$ et positive après.
3. La fonction f est donc décroissante avant $-\frac{3}{2}$ et positive après.

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f		↘		↗	

Exercice 47P241

1. Le dénominateur est un polynôme qui est toujours strictement positif (en effet comme $x^2 \geq 0$ on aura $x^2 + 1 \geq 1 > 0$)

   $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$, je reconnais $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$ avec $u = 1$, $u' = 0$, $v = x^2+1$ et $v' = 2x$

   Ainsi $f'(x) = \frac{0(x^2+1)-1(2x)}{(x^2+1)^2} = \frac{-2x}{(x^2+1)^2}$

2.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$-2x$		$+$	0	$-$	
$(x^2+1)^2$		$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f		↗	1	↘	

Exercice 48P241

a. Le dénominateur est strictement positif sur I

$f(x) = \frac{3-4x}{2+5x}$, je reconnais $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$ avec $u = 3-4x$, $u' = -4$, $v = 2+5x$ et $v' = 5$

Ainsi $f'(x) = \frac{-4(2+5x)-(3-4x)5}{(2+5x)^2} = \frac{-8-20x-(15-20x)}{(2+5x)^2} = \frac{-8-20x-15+20x}{(2+5x)^2} = \frac{-23}{(2+5x)^2}$

x	$-\frac{2}{5}$		$+\infty$
-23		$-$	
$(2+5x)^2$	0	$+$	
$f'(x)$	$\|\|$	$-$	
f	$\|\|$	$\searrow$	

b. $f(x) = 4 + \frac{1}{x}$ donc sur I on aura : $f'(x) = -1/x^2$

x	0		$+\infty$
-1		$-$	
x^2	0	$+$	
$f'(x)$	$\|\|$	$-$	
f	$\|\|$	$\searrow$	

Exercice 48P241

a. $f(x) = 9x + \frac{1}{x} + 4$ donc sur I on aura : $f'(x) = 9 + \frac{-1}{x^2} = \frac{9x^2}{x^2} + \frac{-1}{x^2} = \frac{9x^2-1}{x^2} = \frac{(3x-1)(3x+1)}{x^2}$

Le minimum local est 10

x	0		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$3x-1$		$-$	0	$+$	
$3x+1$		$+$		$+$	
x^2	0	$+$		$+$	
$f'(x)$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
f	$\|\|$	$\searrow$		$\nearrow$	

b. $f(x) = 2x^2 - \frac{1}{x}$ donc sur I on aura : $f'(x) = 4x - \frac{-1}{x^2} = \frac{4x^3+1}{x^2} = \frac{9x^2-1}{x^2} = \frac{(3x-1)(3x+1)}{x^2}$

Comme $x \geq 0$, $4x^3 \geq 0$ et $4x^3 + 1 > 0$

x	0		$+\infty$
$4x^3+1$		$+$	
x^2	0	$+$	
$f'(x)$	$\|\|$	$+$	
f	$\|\|$	$\nearrow$	

x	0		$+\infty$
$4x^3+1$		$+$	
x^2	0	$+$	
$f'(x)$	||	$-$	
f	||		

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$-2x$		$+$	0	$-$	
$(x^2+1)^2$		$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f					

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f					

x	0		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$3x-1$		$-$	0	$+$	
$3x+1$		$+$		$+$	
x^2	0	$+$		$+$	
$f'(x)$	||	$-$	0	$+$	
f					