Devoir surveillé : Degré 3 et dérivées (version révisions)

Exercice 1

Soit f la fonction polynôme du troisième degré $-3x^3 + 18x^2 - 15x$

1) Démontrer que f admet comme forme factorisée :
   $f(x) = -3(x-5)(x-1)x$ et en déduire les trois racines.
2) Faire un tableau de signe de la fonction f (à faire deux fois, histoire de pouvoir réviser les deux approches)

Bonus : faire la même chose avec $g(x) = 7(x-4)(x+2)^2$

Exercice 2

Soit g la fonction qui a tout réel x associe le réel $g(x) = 5x^3 + 7$

1) Donner les image de 2 et de -1 par g
2) Donner une valeur exacte de l'antécédent de 11 par g, puis un arrondi à 10^{-2}

Exercice 3

Dériver les fonctions suivantes :

$f(x) = 5x^2 - 3x + 4$ définie sur $\mathbb{R}$ $\quad g(x) = \frac{8}{x} - \frac{5x^3}{4}$ définie sur $I =]0; \infty[$

$h(x) = (4x^7 + 6\mathrm{x}^3)\cos(x)$ définie sur $\mathbb{R}$ (ne pas factoriser ou développer)

Exercice 4

Soit f la fonction qui a tout réel x associe le réel $f(x) = x^3 + 9x^2 - 48x + 7$

Partie 1

1) Dériver f
2) Déterminer une racine évidente de f'
3) En déduire la seconde racine, puis une écriture factorisée de f
4) Faire un tableau de signe pour la fonction f'
5) En déduire les variations de f que vous indiquerez dans le tableau précédent une fois rallongé.

Exercice 5

Soit f la fonction qui a tout réel x associe le réel $f(x) = \frac{6}{x} - 3x^2 + 2x + 5$

1) Dériver f
2) Donner la formule de la tangente à C_f la courbe représentative de f au point d'abscisse a.
3) En déduire l'équation de la tangente à C_f au point d'abscisse $a = -2$.
4) En utilisant cette tangente donner une approximation de $f(-2{,}04)$ et de $f(-1{,}998)$

Correction

Exercice 1

1) Démontrer que f admet comme forme factorisée :
$-3(x-5)(x-1)x = (-3x+15)(x^2-x) = -3x^3+3x^2+15x^2-15x = -3x^3+18x^2-15x = f(x)$ comme $f(x) = -3(x-5)(x-1)\,(x-0)$ les racines seront 5, 1 et 0.
2) Faire un tableau de signe de la fonction f (à faire deux fois, histoire de pouvoir réviser les deux approches)

x	$-\infty$		0		1		5		$+\infty$
-3		-		-		-		-	
$x-5$		-		-		-	0	+	
$x-1$		-		-	0	+		+	
x		-	0	+		+		+	
$f(x)$		+	0	-	0	+	0	-	

Exercice 2

Soit g la fonction qui a tout réel x associe le réel $g(x) = 5x^3+7$

1) $g(2) = 5\times 2^3+7 = 47$ $\qquad$ $g(-1) = 5\times(-1)^3+7 = 2$
2) $g(x) = 11 \Leftrightarrow 5x^3+7 = 11 \Leftrightarrow 5x^3 = 11-4 \Leftrightarrow x^3 = \frac{7}{5} \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{\frac{7}{5}}$
ainsi l'antécédent vaut à peu près 1,12.

Exercice 3

Dériver les fonctions suivantes :

$f(x) = 5x^2-3x+4$ donc $f'(x) = 10x-3$

$g(x) = \frac{8}{x} - \frac{5x^3}{4} = 8\frac{1}{x} - \frac{5}{4}x^3$donc $g'(x) = 8\left(-\frac{1}{x^2}\right) - \frac{5}{4}(3x^2) = -\frac{8}{x^2} - \frac{15}{4}x^2$

$h(x) = (4x^7+6\mathrm{x}^3)\cos(x)$ je reconnais $(uv)' = u'v+uv'$

avec $u = 4x^7+6\mathrm{x}^3$, $u' = 28x^6+18x^2$, $v = \cos x$ et $v' = -\sin x$

ainsi $h'(x) = (28x^6+18x^2)\cos x + (4x^7+6\mathrm{x}^3)(-\sin x)$

Exercice 4

Soit f la fonction qui a tout réel x associe le réel $f(x) = x^3+9x^2-48x+7$

Partie 1

1) $f'(x) = 3x^2+18x-48$
2) $f'(2) = 3\times 2^2+18\times 2-48 = 12+36-48 = 0$ donc 2 est une racine évidente.

3) On sait que si $x_1$et x_2 sont les racines d'un polynôme de la forme $ax^2 + bx + c$ alors $x_1x_2 = \frac{c}{a}$ ainsi $x_2 = \frac{c}{ax_1} \Leftrightarrow x_2 = \frac{-48}{3\times 2} \Leftrightarrow x_2 = -8$ ainsi $f'(x) = 3(x-2)(x+8)$
4) .

x	$-\infty$		-8		2		$+\infty$
3		+		+		+	
$x-2$		-		-	0	+	
$x+8$		-	0	-		+	
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Exercice 5

Soit f la fonction qui a tout réel x associe le réel $f(x) = \frac{6}{x} - 3x^2 + 2x + 5$

5) Dériver $f'(x) = -\frac{6}{x^2} - 6x + 2$
6) $y = f'(a)(x-a) + f(a)$
7) $f(-2) = \frac{6}{-2} - 3\times(-2)^2 + 2\times(-2) + 5 = -14,$
$f'(-2) = -\frac{6}{(-2)^2} - 6(-2) + 2 = -1{,}5 + 12 + 2 = 12{,}5$ donc
$y = 12{,}5\big(x - (-2)\big) - 14 \Leftrightarrow y = 12{,}5x + 25 - 14 \Leftrightarrow y = 12{,}5x + 11.$
8) $f(-2{,}04) \approx -2{,}04 \times 12{,}5 + 11 = -14{,}5$
$f(-1{,}998) \approx -1{,}998 \times 12{,}5 + 11 = -13{,}97$

x	$-\infty$		-8		2		$+\infty$
3		+		+		+	
$x-2$		-		-	0	+	
$x+8$		-	0	-		+	
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$							