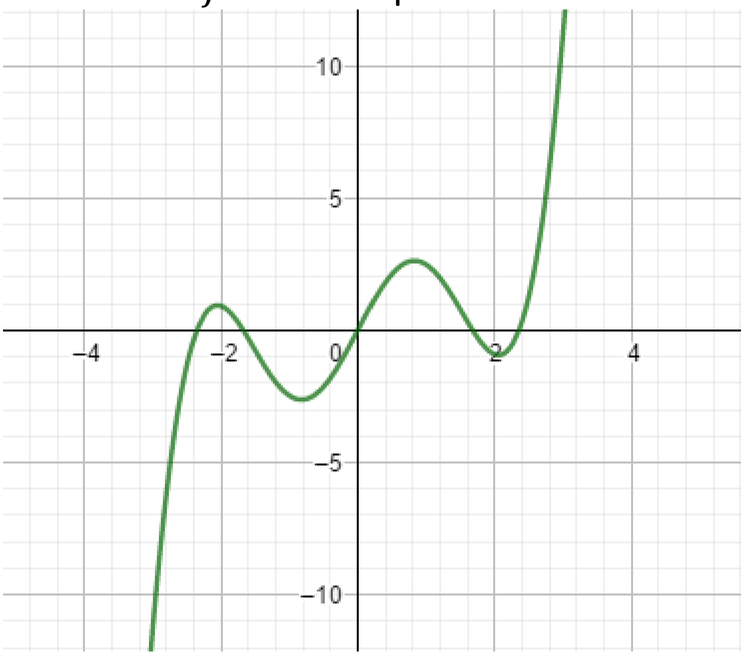
9/11/2020

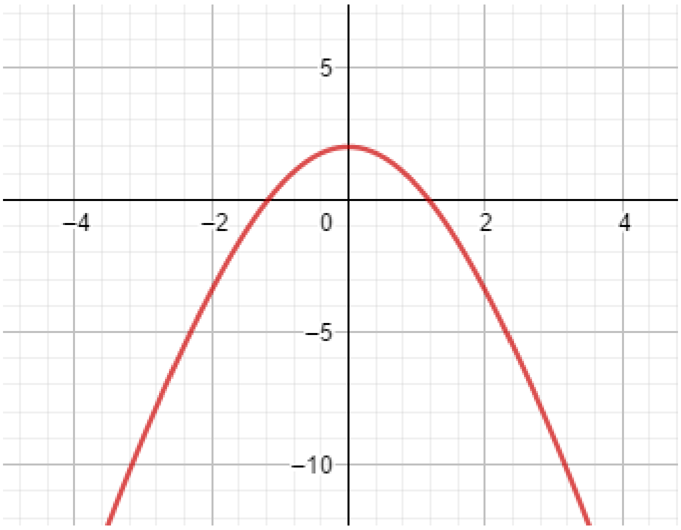
Etudier la parité des fonctions suivantes :
$f(x) = 5x - 3x^2 \sin(x)$
$g(x) = \cos(2x) - (x-1)(x+1)$

Correction :
$f(x) = 5x - 3x^2 \sin(x)$ donc
$f(-x) = 5(-x) - 3(-x)^2 \sin\big((-x)\big)$
$= -5x - 3x^2(-\sin(\mathrm{x}))$ à cause entre autre du fait que $\sin(x)$ est impaire et que $(-x)^2 = x^2$
Ainsi $f(-x) = -5x + 3x^2 \sin(\mathrm{x}) = -(5x - 3x^2 \sin(x)) = -\mathrm{f(x)}$
La fonction f est donc paire.

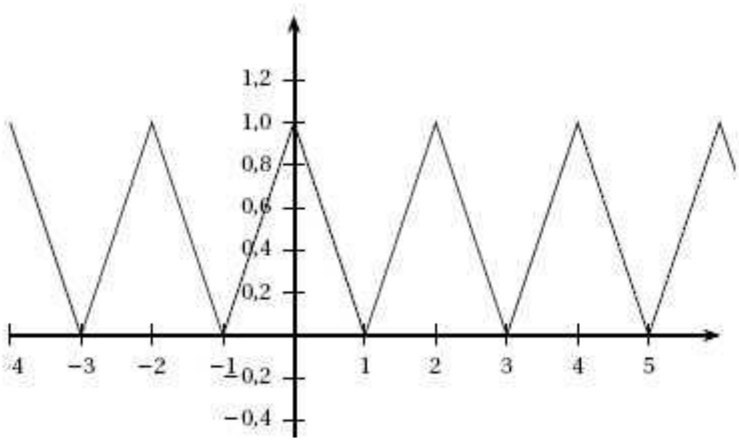


$g(x) = \cos(2x) - (x-1)(x+1)$ reformulons cette fonction pour limiter les difficultés à venir.
$g(x) = \cos(2\mathrm{x}) - (\mathrm{x}^2 - 1) = \cos(2\mathrm{x}) - \mathrm{x}^2 + 1$
ainsi

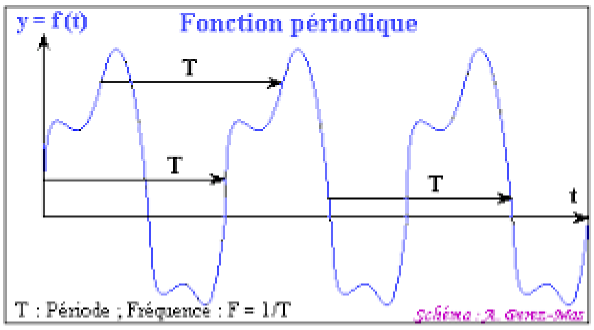
$$\begin{aligned} g(-x) &= \cos\big(2(-x)\big) - (-x)^2 + 1 \\ &= \cos(-2x) - x^2 + 1 \\ &= \cos(2x) - x^2 + 1 = g(x) \text{ donc la fonction est paire.} \end{aligned}$$



Périodicité



Voici une fonction 2-périodique, autrement dit de période 2.



Définition : T-périodicité
f est T-périodique ⇔ $f(x+T) = f(x)$

Visuellement ça correspond à une courbe qui est constitué d'un motif de largeur T reproduit encore et encore à l'infini.
https://homeomath2.imingo.net/images/periode.gif

Remarques :
Si f est T-périodique alors :

- $f(x) = f(x+T) = f(x+2T) = f(x+3T) =$ … etc

- La fonction est admet aussi comme périodes 2T, 3T, $4T$…
- Les deux propriétés précédentes n'ont rien à voir l'une avec l'autre.

Montrer que $f(x) = \cos(4x) + 5\sin(6x)$

$g(x) = \cos\left(\frac{x}{2}\right)\sin\left(\frac{x}{3}\right)$

$h(x) = \cos^2(6x) + \sin(9x)$

sont respectivement π, 12π et $\frac{2\pi}{3}$ périodiques.

Correction

Pour montre que f est π −périodique, je dois montrer que pour tout réel x on a $f(x+\pi) = f(x)$

On a : $f(x) = \cos(4x) + 5\sin(6x)$ donc :

$$\begin{aligned} f(x+\pi) &= \cos\big(4(x+\pi)\big) + 5\sin\big(6(x+\pi)\big) \\ &= \cos(4x+4\pi) + 5\sin(6x+6\pi) \\ &= \cos(4x + 2\times 2\pi) + 5\sin(6x + 3\times 2\pi) \end{aligned}$$

Or cos et sin sont deux fonctions 2π −périodiques donc on aura :

$f(x+\pi) = \cos(4x) + 5\sin(6x) = f(x)$

La fonction f est bien π −périodique

$g(x) = \cos\left(\frac{x}{2}\right)\sin\left(\frac{x}{3}\right)$ donc :

$$\begin{aligned} g(x+12\pi) &= \cos\left(\frac{(x+12\pi)}{2}\right)\sin\left(\frac{(x+12\pi)}{3}\right) \\ &= \cos\left(\frac{x}{2} + \frac{12\pi}{2}\right)\sin\left(\frac{x}{3} + \frac{12\pi}{3}\right) \\ &= \cos\left(\frac{x}{2} + 6\pi\right)\sin\left(\frac{x}{3} + 4\pi\right) \\ &= \cos\left(\frac{x}{2} + 3\times 2\pi\right)\sin\left(\frac{x}{3} + 2\times 2\pi\right) \\ &= \cos\left(\frac{x}{2}\right)\sin\left(\frac{x}{3}\right) \end{aligned}$$

$h(x) \quad = \cos^2(6x) + \sin(9x)$ donc

$h\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) = \cos^2\left(6\left(x + \frac{2\pi}{3}\right)\right) + \sin\left(9\left(x + \frac{2\pi}{3}\right)\right)$

$$= \cos^2\left(6x + 6\frac{2\pi}{3}\right) + \sin\left(9x + 9\frac{2\pi}{3}\right)$$
$$= \cos^2\left(6x + \frac{6\times 2\pi}{3}\right) + \sin\left(9x + \frac{9\times 2\pi}{3}\right)$$
$$= \cos^2(6x + 4\pi) + \sin(9x + 6\pi)$$
$$= \cos^2(6x + 2\times 2\pi) + \sin(9x + 3\times 2\pi)$$
$= \cos^2(6x) + \sin(9x)$ car les fonctions cos et sin sont toutes deux 2π −périodiques.