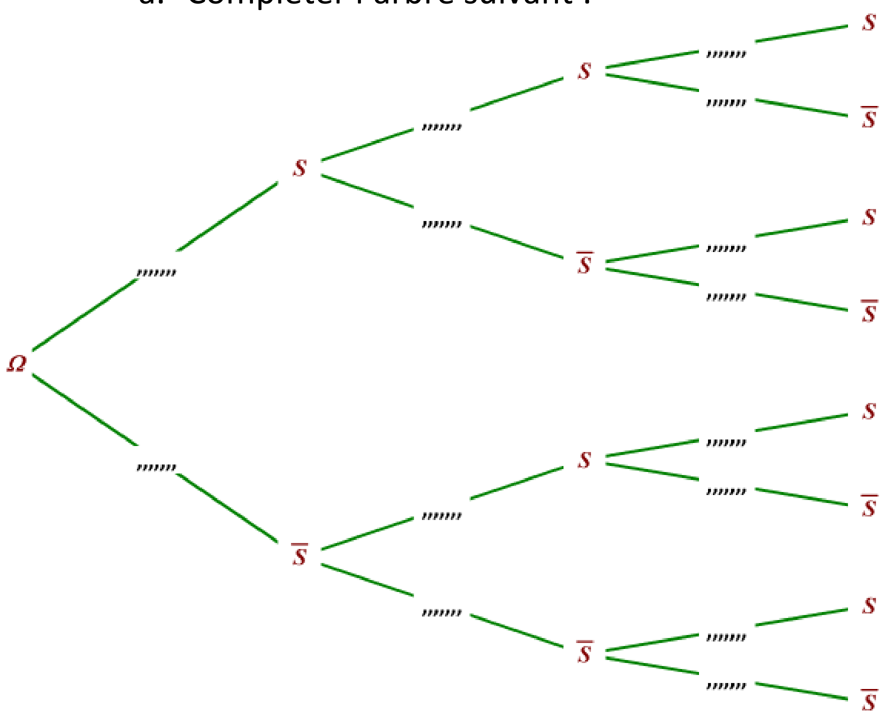
Devoir probabilités

Durée 1h

Exercice 1

Dans une urne on a dix boules : 2 gagnantes et 8 perdantes.
On se propose de tirer successivement et avec remises n boules.
On définit X comme étant la variable aléatoire comptant le nombre de succès.

1) Donner la loi suivie par X et ses paramètres (on doit justifier).
2) On fixe pour cette question $n = 3$
   a. Compléter l'arbre suivant :



   b. Donner le calcul permettant de trouver la valeur exacte de $P(X = 2)$

A partir de maintenant $n = 100$.

3) Donner l'espérance et l'écart type de X
4) Donner la valeur exacte de $P(X \geq 1)$
5) A l'aide de votre calculatrice déterminer :
   a. $P(X = 18)$ c. $P(5 \leq X \leq 30)$
   b. $P(X \leq 15)$ d. $P(X > 22)$

Exercice 2

X est une variable aléatoire associée au gain obtenu à l'issue d'une partie d'un jeu de hasard donné.

x_i	-4	-1	0	6	9	15
$P(X = x_i)$	$0,25$	$0,15$	$0,25$	$0,1$		$0,05$

1) Compléter le tableau de la loi de X
2) Déterminer les probabilités suivantes : $P(X \leq -1)$ $P(X > 1)$
3) Donner l'espérance de X puis interprétez cette valeur.

Exercice 3

Chaque jour avant de partir s'entraîner, un groupe de cyclistes s'intéresse à l'indice mesurant la qualité de l'air. Il peut prendre les trois valeurs suivantes : *mauvais*, *correct* ou *bon*.

Une étude statistique a permis d'obtenir les résultats suivants :

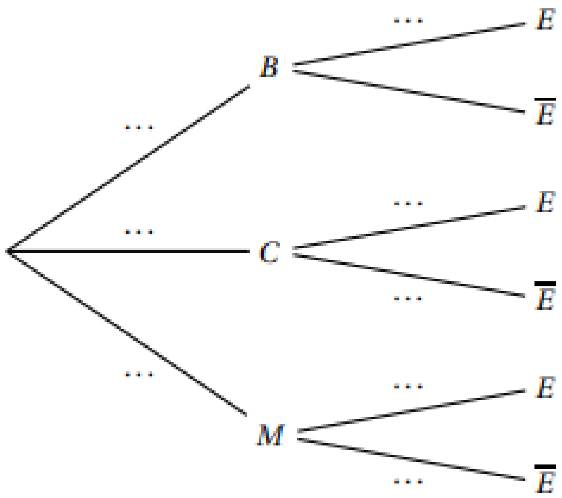
- dans 54 % des cas, l'indice mesurant la qualité de l'air est *bon*; dans 41 % des cas. il est *correct*; le reste du temps, l'indice est *mauvais*.
- si l'indice est *bon*, dans 90 % des cas le groupe de cyclistes part s'entraîner. , si l'indice est *correct*, il y a une chance sur deux pour que le groupe de cyclistes parte s'entraîner.
- si l'indice est *mauvais*, dans 80 % des cas le groupe de cyclistes ne part pas s'entraîner,

On choisit un jour au hasard. On considère les évènements suivants :

- B : « L'indice mesurant la qualité de l'air est *bon* » ;
- C : « L'indice mesurant la qualité de l'air est *correct* » ;
- M : « L'indice mesurant la qualité de l'air est *mauvais* » ;
- E : « Le groupe de cyclistes s'entraîne ».

Pour tout évènement E, on note $\overline{E}$ l'évènement contraire de E.

1. compléter l'arbre de probabilités ci-dessous.



2. Définir par une phrase l'évènement $B \cap E$ et calculer sa probabilité.
3. Montrer que la probabilité que le groupe de cyclistes s'entraîne est égale à 0,701.
4. Sachant que le groupe de cyclistes s'est entraîné, calculer la probabilité que l'indice mesurant la qualité de l'air soit *bon*.

Exercice 4

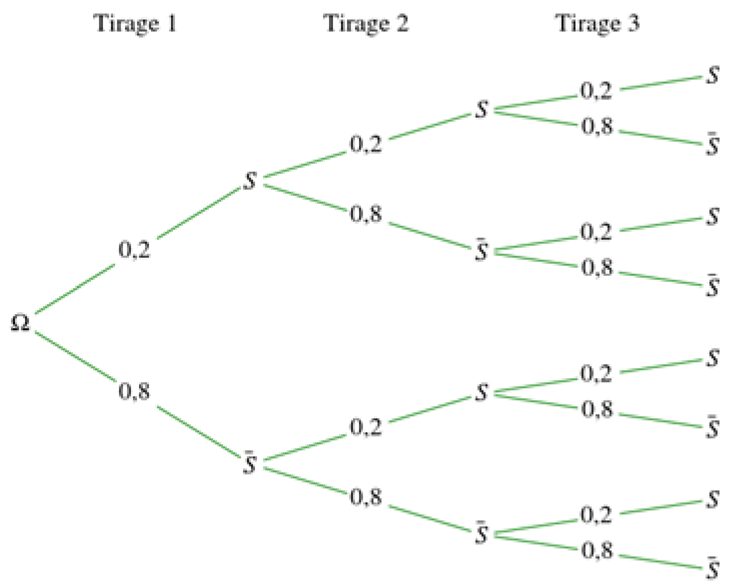
Donner les coefficients binomiaux pour $n = 7$

k	0	1	2	3	4	5	6	7
Nombre de chemins								

Correction

Exercice 1

1) On répète n fois de manière identique et indépendant la même épreuve de Bernoulli de paramètre $p = 0{,}2$. Ainsi X qui compte le nombre de succès suit une loi binomiale de paramètre n et $p = 0{,}2$
2) a.



   b. $P(X = 2) = 3 \times 0{,}2^2 \times 0{,}8^1 = 0{,}096$

3) $E(X) = np = 100 \times 0{,}2 = 20$ et $\sigma = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{100 \times 0{,}2 \times 0{,}8} = 4$
4) $P(X \geq 1) = 1 - 0{,}2^{100}$
5) a) $P(X = 18) = binomFdp(100{,}0.2{,}18) \approx 0{,}0909$
   b) $P(X \leq 15) = binomFrep(100{,}0.2{,}15) \approx 0{,}1285$
   c) $P(5 \leq X \leq 30) = P(X \leq 30) - P(X \leq 4)$
   $= binomFrep(100{,}0.2{,}30) - binomFrep(100{,}0.2{,}4) \approx 0{,}9939$
   d) $P(X > 22) = 1 - P(X \leq 22) = 1 - binomFrep(100{,}0.2{,}30) \approx 0{,}2611$

Exercice 2

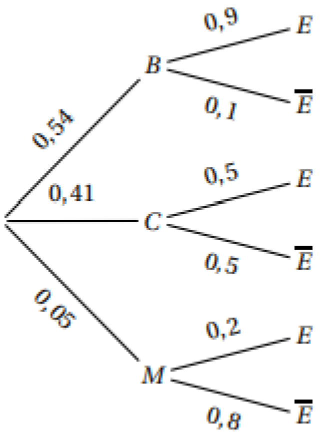
$P(X \leq 3) = 0{,}1 + 0{,}2 + 0{,}05 = 0{,}35$
$P(X < 4) = P(X \leq 3) = 0{,}35$
$P(X \geq 2) = 0{,}2 + 0{,}5 + 0{,}15 + 0{,}5 = 0{,}9$

x_i	-4	-1	0	6	9	15
$P(X = x_i)$	$0,25$	$0,15$	$0,25$	$0,1$	$0,2$	$0,05$

1) Compléter le tableau de la loi de X
2) $P(X \leq -1) = P(X = -4) + P(X = -1) = 0{,}25 + 0{,}15 = 0{,}4$
   $P(X > 1) = P(X = 6) + P(X = 9) + P(X = 15) = 0{,}35$
3) $E(X) = -4 \times 0{,}25 - 1 \times 0{,}15 + 0 \times 0{,}25 + 6 \times 0{,}1 + 9 \times 0{,}2 + 15 \times 0{,}05 = -1 - 0{,}15 + 0 + 0{,}6 + 1{,}8 + 0{,}75 = 2$

Exercice 3

1.



2. $B \cap E$ est l'évènement « L'indice mesurant la qualité de l'air est bon et le groupe de cycliste s'entraîne ».
$P(B \cap E) = P(B) \times P_B(E) = 0{,}54 \times 0{,}9 = \boxed{0{,}486}$
3. Les évènements B, C et M forment une partition de l'univers, donc, d'après la formule des probabilités totales, on a :
$$P(E) = P(B \cap E) + P(C \cap E) + P(M \cap E) = P(B) \times P_B(E) + P(C) \times P_C(E) + P(M) \times P_M(E)$$
$$= 0{,}486 + 0{,}41 \times 0{,}5 + 0{,}05 \times 0{,}2 = 0{,}486 + 0{,}205 + 0{,}01 = \boxed{0{,}701}$$
4. D'après la formule des probabilités conditionnelles, on a :
$$P_E(B) = \frac{P(B \cap E)}{P(E)} = \frac{0{,}486}{0{,}701} \approx \boxed{0{,}693}$$

Exercice 4

k	0	1	2	3	4	5	6	7
Nombre de chemins	1	7	21	35	35	21	7	1

Exercice 5

Partie A

Chaque jour avant de partir s'entraîner, un groupe de cyclistes s'intéresse à l'indice mesurant la qualité de l'air. Il peut prendre les trois valeurs suivantes : *mauvais*, *correct* ou *bon*.
Une étude statistique a permis d'obtenir les résultats suivants :

— dans 54 % des cas, l'indice mesurant la qualité de l'air est *bon*; dans 41 % des cas. il est *correct*; le reste du temps, l'indice est *mauvais*.

— si l'indice est *bon*, dans 90 % des cas le groupe de cyclistes part s'entraîner. , si l'indice est *correct*, il y a une chance sur deux pour que le groupe de cyclistes parte s'entraîner.

— si l'indice est *mauvais*, dans 80 % des cas le groupe de cyclistes ne part pas s'entraîner,

On choisit un jour au hasard. On considère les évènements suivants :

— B : « L'indice mesurant la qualité de l'air est *bon* » ;

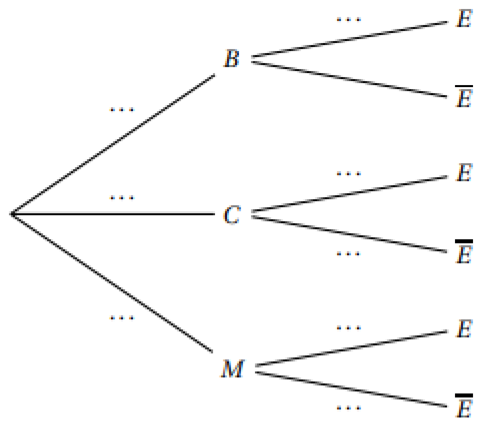
— C : « L'indice mesurant la qualité de l'air est *correct* » ;

— M : « L'indice mesurant la qualité de l'air est *mauvais* » ;

— E : « Le groupe de cyclistes s'entraîne ».

Pour tout évènement E, on note $\overline{E}$ l'évènement contraire de E.

1. Recopier et compléter l'arbre de probabilités ci-dessous.



2. Définir par une phrase l'évènement $B \cap E$ et calculer sa probabilité.

3. Montrer que la probabilité que le groupe de cyclistes s'entraîne est égale à $0,701$.

4. Sachant que le groupe de cyclistes s'est entraîné, calculer la probabilité que l'indice mesurant la qualité de l'air soit *bon*.

Partie B

Pour se protéger les jours où l'indice mesurant la qualité de l'air est *mauvais*, 30 % des cyclistes du groupe décident de s'équiper de masques de protection.
On choisit au hasard 5 cyclistes dans ce groupe. On suppose que le nombre de cyclistes dans ce groupe est suffisamment grand pour assimiler ce choix à un tirage successif avec remise.
On note X la variable aléatoire égale au nombre de cyclistes qui décident de s'équiper parmi les 5 cyclistes interrogés.

1. Montrer que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

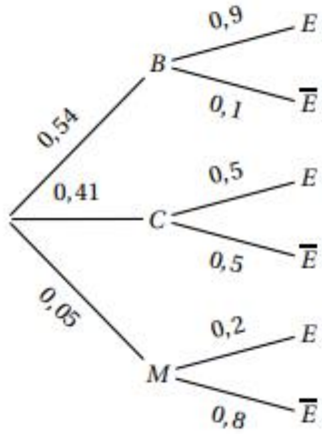
2. Déterminer la probabilité qu'exactement deux cyclistes parmi les cinq interrogés décident de s'équiper.

3. Déterminer la probabilité qu'au moins un des cinq cyclistes interrogés décide de s'équiper.

Exercice 5

Partie A

1.



2. $B \cap E$ est l'évènement « L'indice mesurant la qualité de l'air est bon et le groupe de cycliste s'entraîne ».
$P(B \cap E) = P(B) \times P_B(E) = 0,54 \times 0,9 = \boxed{0,486}$
3. Les évènements B, C et M forment une partition de l'univers, donc, d'après la formule des probabilités totales, on a :
$P(E) = P(B \cap E) + P(C \cap E) + P(M \cap E) = P(B) \times P_B(E) + P(C) \times P_C(E) + P(M) \times P_M(E)$
$= 0,486 + 0,41 \times 0,5 + 0,05 \times 0,2 = 0,486 + 0,205 + 0,01 = \boxed{0,701}$
4. D'après la formule des probabilités conditionnelles, on a :
$P_E(B) = \dfrac{P(B \cap E)}{P(E)} = \dfrac{0,486}{0,701} \approx \boxed{0,693}$

Partie B

1. L'expérience consiste à répéter $\underline{5}$ fois de manière indépendante une même épreuve ayant deux issues possibles, le succès (le cycliste est équipé d'un masque) avec la probabilité $\underline{p = 0,3}$ et l'échec (le cycliste n'est pas équipé d'un masque) avec la probabilité $q = 1 - p = 0,7$. On a donc un schéma de Bernoulli.
La variable aléatoire X compte le nombre de succès, elle suit donc la loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = 0,3$.
$X \hookrightarrow \mathscr{B}(5\,;\,0,3)$
2. $P(X = 2) = \binom{5}{2} \times 0,3^2 \times 0,7^3 = \boxed{0,308\,7}$
3. $P(X \geqslant 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \binom{5}{0} \times 0,3^0 \times 0,7^5 = \boxed{0,831\,93}$