Devoir probabilités

Durée 1h

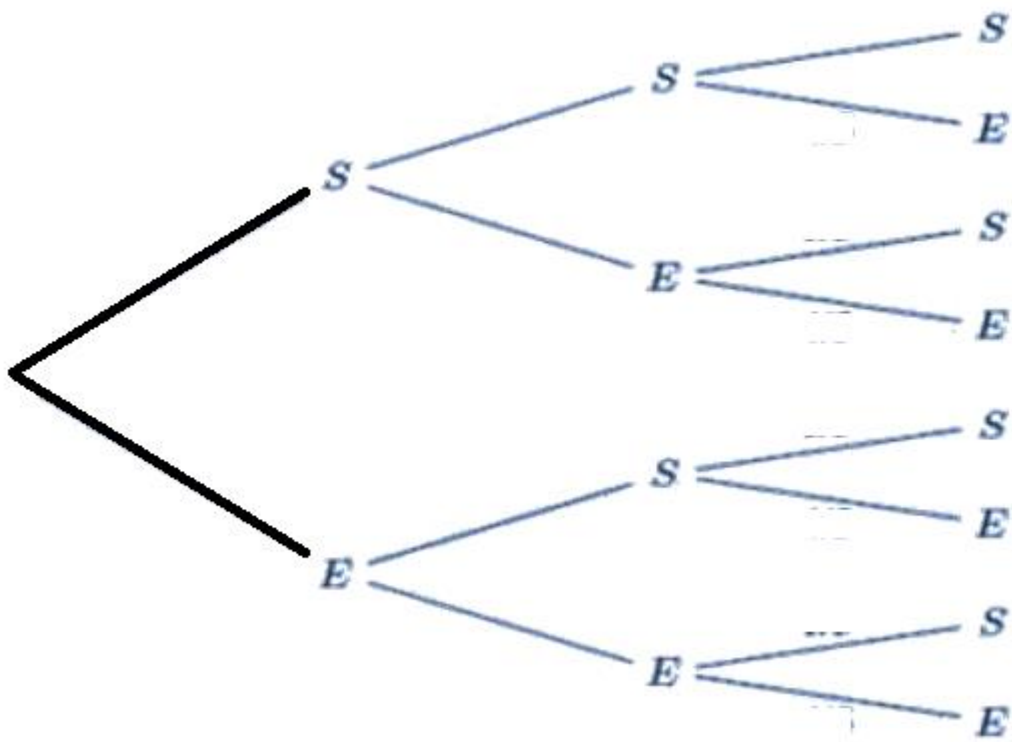
Exercice 1

On se propose de lancer n fois un dé, si on obtient un trois on considère que l'épreuve est un succès (noté S) sinon que c'est un échec (noté E)

On se propose de tirer successivement et avec remises n boules.

On définit X comme étant la variable aléatoire comptant le nombre de succès.

1) Donner la loi suivie par X et ses paramètres (on doit justifier).
2) On fixe pour cette question $n = 3$
   a. Compléter l'arbre suivant :



   b. Donner le calcul permettant de trouver la valeur exacte de $P(X = 1)$

A partir de maintenant $n = 100$.

3) Donner l'espérance et l'écart type de X
4) Donner la valeur exacte de $P(X \geq 1)$
5) A l'aide de votre calculatrice déterminer :
   a. $P(X = 15)$ c. $P(10 \leq X \leq 20)$
   b. $P(X \leq 13)$ d. $P(X > 23)$

Exercice 2

X est une variable aléatoire associée au gain obtenu à l'issue d'une partie d'un jeu de hasard donné.

Numéro	1	2	3	4	5	6
Probabilité	$0,1$	$0,15$	$0,15$	$0,05$	$0,05$	

1) Compléter le tableau de la loi de X

2) Déterminer les probabilités $P(X \leq -3)$ et $P(X > 4{,}5)$
3) Donner l'espérance de X puis interprétez cette valeur.

Exercice 3

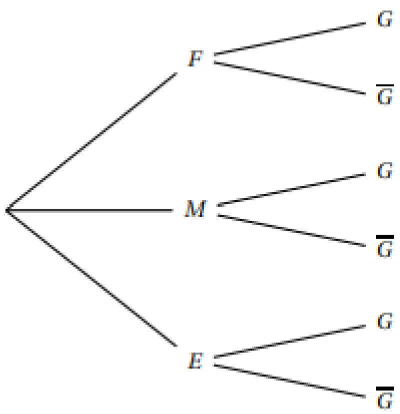
Un club de football est composé d'équipes adultes masculines, adultes féminines et d'équipes d'enfants. Chaque week-end, la présidente Claire assiste au match d'une seule des équipes du club et elle suit :

- dans 10 % des cas, le match d'une équipe adulte féminine;
- dans 40 % des cas, le match d'une équipe adulte masculine;
- dans les autres cas, le match d'une équipe d'enfants.

Lorsqu'elle assiste au match d'une équipe masculine, la probabilité que celle-ci gagne est 0,6. Lorsqu'elle assiste au match d'une équipe d'enfants, la probabilité que celle-ci gagne est 0,54.
La probabilité que Claire voie l'équipe de son club gagner est 0,58. On choisit un week-end au hasard. On note les évènements suivants :

- F : « Claire assiste au match d'une équipe adulte féminine »;
- M : « Claire assiste au match d'une équipe adulte masculine »;
- E : « Claire assiste au match d'une équipe d'enfants »;
- G : « l'équipe du club de Claire gagne le match ».

Pour tous évènements A et B, on note $\bar{A}$ l'évènement contraire de A, $p(A)$ la probabilité de A et, si B est de probabilité non nulle, $p_B(A)$ la probabilité de A sachant B.



1.

1. Compléter l'arbre ci-dessus au fur et à mesure de l'exercice.
2. Déterminer la probabilité p(M ∩G).
3. a. Démontrer que p(F ∩G) = 0,07.
   b. En déduire $p_F\ (G)$.
   c. La probabilité que l'équipe adulte féminine gagne un match est 0,47. La présence de Claire semble-t-elle favoriser la victoire de l'équipe adulte féminine ?
4. Claire annonce avoir assisté à la victoire d'une équipe du club. Quelle est la probabilité qu'elle ait suivi le match d'une équipe adulte féminine ?

Exercice 4

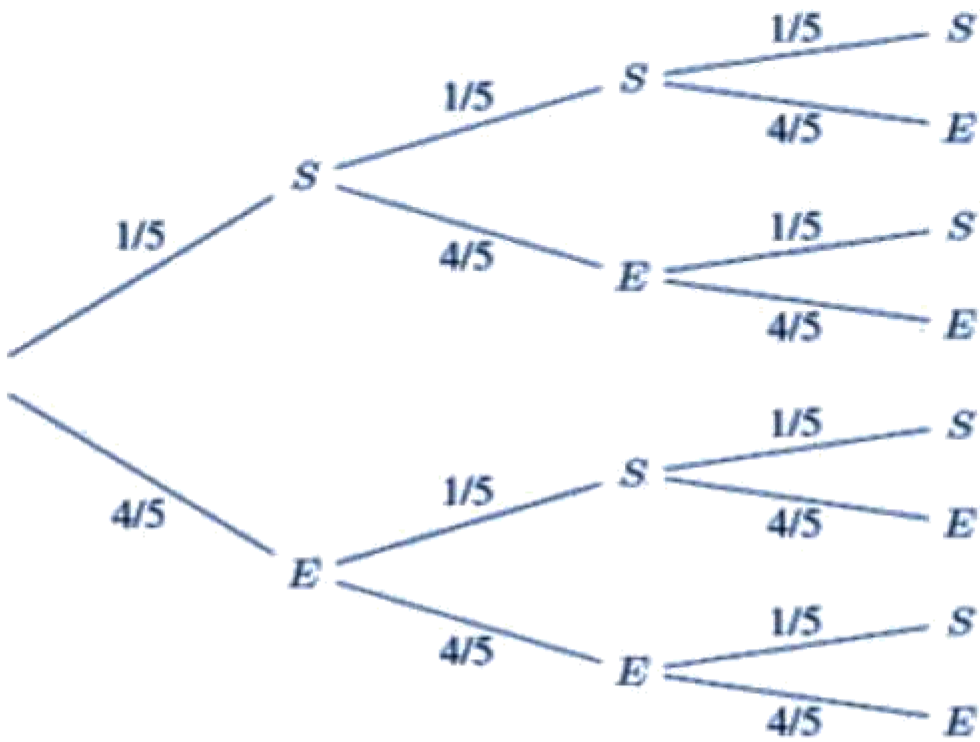
Donner les coefficients binomiaux pour $n = 8$

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Nombre de chemins									

Correction

Exercice 1

1) On répète n fois de manière identique et indépendant la même épreuve de Bernoulli de paramètre $p = \frac{1}{6}$. Ainsi X qui compte le nombre de succès suit une loi binomiale de paramètre n et $p = \frac{1}{6}$
2) a.



b. $P(X=1) = 3 \times \left(\frac{1}{6}\right)^1 \times \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{25}{72}$

3) $E(X) = np = 100 \times \frac{1}{6} = \frac{50}{3}et\sigma = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{100 \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6}} = \frac{10}{6}\sqrt{5} = \frac{2}{3}\sqrt{5}$
4) $P(X \geq 1) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{100}$
5) a) $P(X = 15) = binomFdp(100{,}1/6{,}15) \approx 0{,}100$
b) $P(X \leq 13) = binomFrep(100{,}1/6{,}13) \approx 0{,}200$
c) $P(10 \leq X \leq 20) = P(X \leq 20) - P(X \leq 9)$
$= binomFrep(100{,}1/6{,}9) - binomFrep(100{,}1/6{,}4) \approx 0{,}827$
d) $P(X > 23) = 1 - P(X \leq 23) = 1 - binomFrep\begin{pmatrix}100{,}1\\6{,}23\end{pmatrix} \approx 0{,}038$

Exercice 2

Numéro	1	2	3	4	5	6
Probabilité	$0,1$	$0,15$	$0,15$	$0,05$	$0,05$	$p(6)$

1) $p(6) = 1 - (0{,}1 + 0{,}15 + 0{,}15 + 0{,}05 + 0{,}05) = 0{,}5$
2) $P(X \leq 3) = 0{,}1 + 0{,}15 + 0{,}15 = 0{,}4$ et $P(X > 4{,}5) = 0{,}05 + 0{,}5 = 0{,}55$

3) $E(X) = 1 \times 0{,}1 + 2 \times 0{,}15 + 3 \times 0{,}15 + 4 \times 0{,}05 + 5 \times 0{,}05 + 6 \times 0{,}5 = 4{,}3$
Si on reproduit un grand nombre de fois l'expérience aléatoire, en moyenne X va valoir 4,3

Exercice 3

Un club de football est composé d'équipes adultes masculines, adultes féminines et d'équipes d'enfants. Chaque week-end, la présidente Claire assiste au match d'une seule des équipes du club et elle suit :

- dans 10 % des cas, le match d'une équipe adulte féminine ;
- dans 40 % des cas, le match d'une équipe adulte masculine ;
- dans les autres cas, le match d'une équipe d'enfants.

Lorsqu'elle assiste au match d'une équipe masculine, la probabilité que celle-ci gagne est 0,6. Lorsqu'elle assiste au match d'une équipe d'enfants, la probabilité que celle-ci gagne est 0,54.
La probabilité que Claire voie l'équipe de son club gagner est 0,58.
On choisit un week-end au hasard. On note les événements suivants :

- F : « Claire assiste au match d'une équipe féminine » ;
- M : « Claire assiste au match d'une équipe masculine » ;
- E : « Claire assiste au match d'une équipe d'enfants » ;
- G : « l'équipe du club de Claire gagne le match ».

1. Voir l'arbre de probabilité en **annexe 1**.

2. $p(M \cap G) = p(M) \times p_M(G) = 0{,}4 \times 0{,}6 = 0{,}24$

3. **a.** D'après la formule des probabilités totales : $p(G) = p(F \cap G) + p(M \cap G) + p(E \cap G)$.
On sait que $p(G) = 0{,}58$ et que $p(M \cap G) = 0{,}24$.
$p(E \cap G) = p(E) \times p_E(G) = 0{,}5 \times 0{,}54 = 0{,}27$
On en déduit que $p(F \cap G) = p(G) - p(M \cap G) - p(E \cap G) = 0{,}58 - 0{,}24 - 0{,}27 = 0{,}07$.

b. $p(F \cap G) = p(F) \times p_F(G)$ donc $p_F(G) = \dfrac{p(F \cap G)}{p(F)} = \dfrac{0{,}07}{0{,}1} = 0{,}7$.
On peut ainsi compléter l'arbre (voir **annexe 1**).

c. La probabilité que l'équipe adulte féminine gagne un match est 0,47.
La probabilité que l'équipe féminine gagne un match sachant que Claire a assisté au match est $p_F(G) = 0{,}7$.
Donc la présence de Claire semble favoriser la victoire de l'équipe féminine.

4. Claire annonce avoir assisté à la victoire d'une équipe de club. La probabilité qu'elle ait suivi le match d'une équipe adulte féminine est $p_G(F) = \dfrac{p(F \cap G)}{p(G)} = \dfrac{0{,}07}{0{,}58} \approx 0{,}12$.

Exercice 4

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Nombre de chemins	1	8	28	56	70	56	28	8	1

Exercice 5

Partie A

Chaque jour avant de partir s'entraîner, un groupe de cyclistes s'intéresse à l'indice mesurant la qualité de l'air. Il peut prendre les trois valeurs suivantes : *mauvais*, *correct* ou *bon*.
Une étude statistique a permis d'obtenir les résultats suivants :

— dans 54 % des cas, l'indice mesurant la qualité de l'air est *bon*; dans 41 % des cas. il est *correct*; le reste du temps, l'indice est *mauvais*.

— si l'indice est *bon*, dans 90 % des cas le groupe de cyclistes part s'entraîner. , si l'indice est *correct*, il y a une chance sur deux pour que le groupe de cyclistes parte s'entraîner.

— si l'indice est *mauvais*, dans 80 % des cas le groupe de cyclistes ne part pas s'entraîner,

On choisit un jour au hasard. On considère les évènements suivants :

— B : « L'indice mesurant la qualité de l'air est *bon* » ;

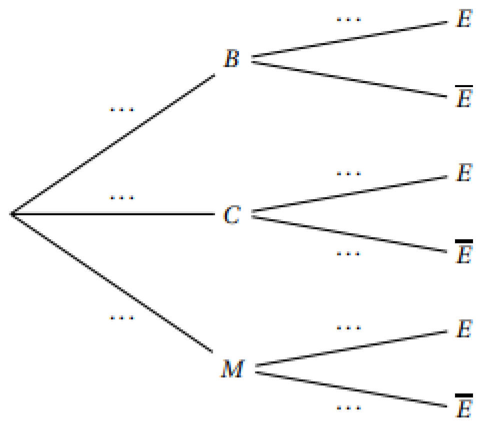
— C : « L'indice mesurant la qualité de l'air est *correct* » ;

— M : « L'indice mesurant la qualité de l'air est *mauvais* » ;

— E : « Le groupe de cyclistes s'entraîne ».

Pour tout évènement E, on note $\overline{E}$ l'évènement contraire de E.

1. Recopier et compléter l'arbre de probabilités ci-dessous.



2. Définir par une phrase l'évènement $B \cap E$ et calculer sa probabilité.
3. Montrer que la probabilité que le groupe de cyclistes s'entraîne est égale à $0,701$.
4. Sachant que le groupe de cyclistes s'est entraîné, calculer la probabilité que l'indice mesurant la qualité de l'air soit *bon*.

Partie B

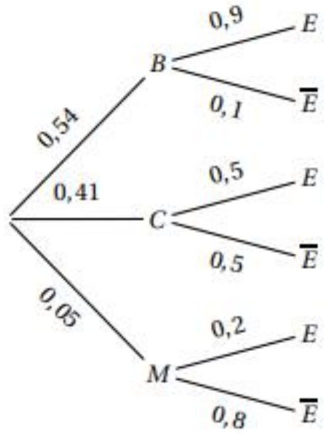
Pour se protéger les jours où l'indice mesurant la qualité de l'air est *mauvais*, 30 % des cyclistes du groupe décident de s'équiper de masques de protection.
On choisit au hasard 5 cyclistes dans ce groupe. On suppose que le nombre de cyclistes dans ce groupe est suffisamment grand pour assimiler ce choix à un tirage successif avec remise.
On note X la variable aléatoire égale au nombre de cyclistes qui décident de s'équiper parmi les 5 cyclistes interrogés.

1. Montrer que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
2. Déterminer la probabilité qu'exactement deux cyclistes parmi les cinq interrogés décident de s'équiper.
3. Déterminer la probabilité qu'au moins un des cinq cyclistes interrogés décide de s'équiper.

Exercice 5

Partie A

1.



2. $B \cap E$ est l'évènement « L'indice mesurant la qualité de l'air est bon et le groupe de cycliste s'entraîne ».
   $P(B \cap E) = P(B) \times P_B(E) = 0,54 \times 0,9 = \boxed{0,486}$
3. Les évènements B, C et M forment une partition de l'univers, donc, d'après la formule des probabilités totales, on a :
   $P(E) = P(B \cap E) + P(C \cap E) + P(M \cap E) = P(B) \times P_B(E) + P(C) \times P_C(E) + P(M) \times P_M(E)$
   $= 0,486 + 0,41 \times 0,5 + 0,05 \times 0,2 = 0,486 + 0,205 + 0,01 = \boxed{0,701}$
4. D'après la formule des probabilités conditionnelles, on a :
   $P_E(B) = \dfrac{P(B \cap E)}{P(E)} = \dfrac{0,486}{0,701} \approx \boxed{0,693}$

Partie B

1. L'expérience consiste à répéter 5 fois de manière indépendante une même épreuve ayant deux issues possibles, le succès (le cycliste est équipé d'un masque) avec la probabilité $p = 0,3$ et l'échec (le cycliste n'est pas équipé d'un masque) avec la probabilité $q = 1 - p = 0,7$. On a donc un schéma de Bernoulli.
   La variable aléatoire X compte le nombre de succès, elle suit donc la loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = 0,3$.
   $X \hookrightarrow \mathscr{B}(5\,;\,0,3)$
2. $P(X = 2) = \binom{5}{2} \times 0,3^2 \times 0,7^3 = \boxed{0,308\,7}$
3. $P(X \geqslant 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \binom{5}{0} \times 0,3^0 \times 0,7^5 = \boxed{0,831\,93}$