I. Les vecteurs

Définition.
Un vecteur $\vec{u}$ est défini par :
- une direction,
- un sens et
- une longueur.

La longueur du vecteur $\vec{u}$ est appelée la **norme** du vecteur et on note $\|\vec{u}\|$.

Définition
La translation de vecteur $\vec{u}$ est une transformation du plan qui à tout point M associe un point M' tel que $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$

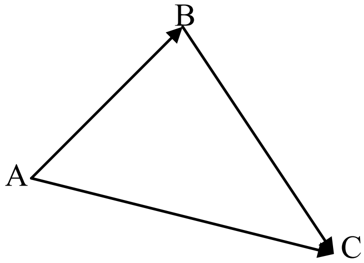
Propriétés.
Si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ alors ABDC est un parallélogramme, on note $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Rightarrow$ ABDC est un parallélogramme
Réciproquement
Si ABDC est un parallélogramme alors $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, on note ABDC est un parallélogramme $\Rightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

Remarque.
On dit alors que les propositions « $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ » et « ABDC est un parallélogramme » sont **équivalentes.**
On note $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow$ ABDC est un parallélogramme.
On encore $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ si et seulement si ABDC est un parallélogramme.

Si ... alors et réciproquement si ... alors se note « $\Leftrightarrow$ » ou bien « si et seulement si »

Propriété
La composition de deux translations de vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est une translation de vecteur $\vec{w}$ avec $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$

Relation de Chasles.
Pout tous points A,B et C on a : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$



Démonstration
Soit trois points A, B et C,
Le point A est transformé en B par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$, le point B est transformé en C par la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$.
Ainsi la composition des translation de vecteurs $\overrightarrow{AB}$ puis $\overrightarrow{BC}$, qui est une translation de vecteur $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$, transforme A en C, elle est donc une translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$. Donc $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

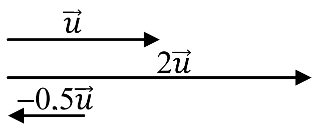
Remarques.
* $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ mais AB + BC≥AC
* $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$ c'est le vecteur nul.

II. Colinéarité de vecteurs

Définition.
Soit un vecteur $\vec{u}$ non nul et k un nombre réel non nul.
On définit le vecteur $k\ \vec{u}$ par :

- la même direction que celle du vecteur $\vec{u}$
- si $k > 0$, les vecteurs $k\ \vec{u}$ et $\vec{u}$ ont le même sens et si $k < 0$, les vecteurs $k\ \vec{u}$ et $\vec{u}$ sont de sens différent.
- La norme de $k\ \vec{u}$ est $|k|$ fois celle de $\vec{u}$: $\|k\ \vec{u}\| = |k| \times \|\vec{u}\|$.

Exemples.
▶ 1.



▶ 2. Les vecteurs $\vec{u}$ est $-\vec{u}$ sont dits **opposés** : ils ont même direction, même norme mais des sens opposés. L'opposé de $\overrightarrow{AB}$ est $-\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$.

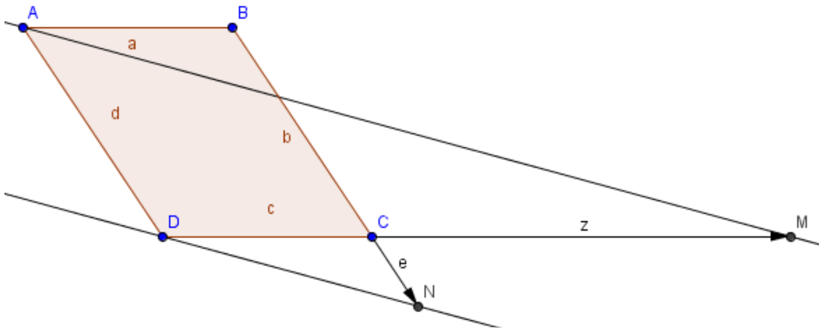
▶ 3. Soit un segment [AB] et I le milieu de [AB]. Que peut-on dire de $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{AB}$?

Définition.
On dit que deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** lorsqu'il existe un nombre réel k tels que $\vec{v} = k \times \vec{u}$.
Cela signifie que les deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont la même direction.

Remarque.
Le vecteur nul est colinéaire à tous les vecteurs : $0 \times \vec{u} = \vec{0}$ et $k \times \vec{0} = \vec{0}$

Règles de calcul.
$k\ (\vec{u} + \vec{v}) = k\ \vec{u} + k\ \vec{v}$ $\qquad (k + k')\ \vec{u} = k\ \vec{u} + k'\ \vec{u}$
Si $k \times \vec{u} = \vec{0}$ alors $k = 0 \quad$ ou $\quad \vec{u} = \vec{0}$, réciproquement Si $k = 0 \quad$ ou $\quad \vec{u} = \vec{0}$ alors $k \times \vec{u} = \vec{0}$.
On note $k \times \vec{u} = \vec{0} \Leftrightarrow k = 0 \quad$ ou $\quad \vec{u} = \vec{0}$.

Exemple.
Soit ABCD un parallélogramme, M et N deux points définis par $\overrightarrow{CM} = 2\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$.
Démontrer que (AM) et (DN) sont parallèles.



$$\overrightarrow{DN} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CN} = \overrightarrow{DC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$$
$$3\overrightarrow{DN} = 3\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AD}$$

or

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CM}$$
$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} + 2\overrightarrow{AB}$$
$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AD} + 3\overrightarrow{DC}$$

On en déduit que $\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{DN}$.
Les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{DN}$ sont colinéaires donc ils ont la même direction. On peut en déduire que les droites (DN) et (AM) sont parallèles.

III. Dans un repère

Une origine O et deux vecteurs non colinéaires $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ définissent un **repère** du plan $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

Définition
Dans un repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ du plan
Les coordonnées du vecteur $\vec{u}$ sont les nombres x et y tels que $\vec{u} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$. On note $\vec{u}\binom{x}{y}$.
Les coordonnées du point M sont les nombres x et y tels que $\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$. On note $M(x, y)$.

Propriété.
Dans un repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ du plan, $A(x_A ; y_A)$ et $B(x_B ; y_B)$.
Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont $\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$.
Lorsque le repère est orthonormé, la distance euclidienne est
$AB = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.

Propriétés.
Soit $\vec{u}\binom{x}{y}$ et $\vec{v}\binom{x'}{y'}$ deux vecteurs
* $\vec{u} = \vec{v} \Leftrightarrow x = x' \quad \text{et} \quad y = y'$.
* Les coordonnées du vecteur somme sont $\vec{u} + \vec{v}\begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \end{pmatrix}$.
* soit k un réel, les coordonnées de $k \times \vec{u}$ sont $k\vec{u}\begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}$.
* $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires $\Leftrightarrow \frac{x}{x'} = \frac{y}{y'}$ ou $xy' - x'y = 0$ *i.e.* les coordonnées sont proportionnelles.

Exemples.
Les vecteurs $\vec{u}\binom{2}{6}$, $\vec{v}\binom{1}{3}$ et $\vec{w}\binom{3}{1}$ sont-ils colinéaires ?
$\frac{2}{1} = \frac{6}{3}$ donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.
$1 \times 1 - 3 \times 3 = 1 - 9 = -8 \neq 0$ donc $\vec{v}$ et $\vec{w}$ ne sont pas colinéaires.

Points particuliers :
Dans un repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ du plan, $A(x_A ; y_A)$, $B(x_B ; y_B)$ et $C(x_C ; y_C)$.
I est le milieu de [AB] $\Leftrightarrow I\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right)$.
G est le centre de gravité du triangle ABC $\Leftrightarrow G\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \frac{y_A + y_B + y_C}{3}\right)$.

Exemple.
A(3 ; 2), B(7 ; 4), C(2 ; 4) et D(4 ; 5).

Les droites (AB) et (CD) sont-elles parallèles ?

$\overrightarrow{AB}\binom{7-3}{4-2}$ $\overrightarrow{AB}\binom{4}{2}$ et $\overrightarrow{CD}\binom{4-2}{5-4}$ $\overrightarrow{CD}\binom{2}{1}$

donc $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{CD}$ les deux droites sont donc parallèles.

Les droites (AC) et (BD) sont-elles parallèles ?

$\overrightarrow{AC}\binom{2-3}{4-2}$ $\overrightarrow{AC}\binom{-1}{2}$ et $\overrightarrow{BD}\binom{4-7}{5-4}$ $\overrightarrow{BD}\binom{-3}{1}$

or $-1 \times 1 \div 2 \neq -3$ donc les deux vecteurs ne sont pas colinéaires

Exemple 2 : A(3 ; 2), B(7 ; 4), E(-5 ; -2) et F(11 ; 7).

Les points A, B, E sont-ils alignés ?

$\overrightarrow{AB}\binom{7-3}{4-2}$ $\overrightarrow{AB}\binom{4}{2}$ et $\overrightarrow{AE}\binom{-5-3}{-2-2}$ $\overrightarrow{AE}\binom{-8}{-4}$

donc $\overrightarrow{AB} = -2\overrightarrow{AE}$ donc (AB) //(AE) donc les trois points sont alignés

Les points A, B, F sont-ils alignés ?

$\overrightarrow{AB}\binom{7-3}{4-2}$ $\overrightarrow{AB}\binom{4}{2}$ et $\overrightarrow{AF}\binom{11-3}{7-2}$ $\overrightarrow{AF}\binom{8}{5}$

$4 \times 5 \div 2 \neq 8$ donc les deux vecteurs ne sont pas colinéaires donc les points ne sont pas alignés

Théorème.

Soit A(x_A ; y_A) et B(x_B ; y_B), la droite (AB) est l'ensemble des points M$(x; y)$ tels que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont colinéaires.

Application, déterminer l'équation d'une droite.

Soit A(2 ; 1) et B(4 ; 3). Déterminons l'équation de (AB).

Soit M$(x; y)$ un point de la droite (AB) alors $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont colinéaires.

Or $\overrightarrow{AB}\binom{4-2}{3-1}$ $\overrightarrow{AB}\binom{2}{2}$ et $\overrightarrow{AM}\binom{x-2}{y-1}$, puisque $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont colinéaires alors leurs coordonnées sont proportionnelles : $\frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{2}$ donc $2(y-1) = 2(x-2) \quad \Leftrightarrow \quad 2y - 2 = 2x - 4$ et donc $y = x - 1$.

$y = x - 1$ est l'équation de la droite (AB) cela signifie que tous les points de la droite (AB) vérifient $y = x - 1$ soit l'ordonnée est l'abscisse moins 1 et réciproquement.