Devoir Maison n°2

A rendre au plus tard le 28/11/2009 à 10h

Exercice 1

Soit ABCD un carré, avec I un point de [AC] distinct du milieu de [AC], la parallèle à (AD) qui passe par I coupe [AB] en M et [DC] en P. La parallèle à (AB) passant par I coupe [AD] en N et [BC] en R. Les droites (NP) et (AC) se coupent en S. Pour nos recherches et nos calculs on se placera dans le repère (A ;$\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AD}$)

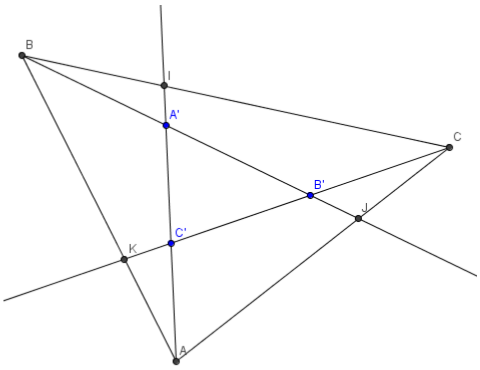
1) Faire une figure.
2) Prouvez qu'il existe deux réels k et λ tels que $\overrightarrow{AI} = k.\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AS} = \lambda.\overrightarrow{AC}$
3) Donnez les coordonnées des points suivants I, N, P, R, M, S en fonction de k et de λ, déduisez une expression des longueurs NI et PC en fonction de k et de λ (aucune justification n'est demandée).
4) Donnez les coordonnées de $\overrightarrow{CS}$ et $\overrightarrow{IS}$ en fonction de k et de λ, exprimez ces vecteurs en fonction de $\overrightarrow{AC}$ et déduisez une expression des longueurs SC et SI en fonction de AC
5) A l'aide des rapports donnés par le théorème de Thalès utilisé dans le triangle NSI exprimez λ en fonction de k.
6) Dans le repère (A ;$\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AD}$), donnez les coordonnées de $\overrightarrow{MR}$ et de $\overrightarrow{MS}$ en fonction de k
7) En déduire une relation entre les vecteurs $\overrightarrow{MR}$ et $\overrightarrow{MS}$.
8) Que peut on conclure sur les points S, M et R ?

Exercice 2

Soit ABC un triangle quelconque et P, Q et R des points tels que $\overrightarrow{CR} = \frac{4}{3}\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CQ} = \frac{4}{7}\overrightarrow{CB}$.

1) Faire un dessin.
2) En utilisant un repère judicieux, montrez que les points R,P et Q sont alignés.

Exercice 3



A'B'C' est un triangle. A est le symétrique de A' par rapport à C, B celui de B' par rapport à A' et C celui de C' par rapport à B'. La droite (AA') coupe la droite (BC) en I ; (BB') coupe (AC) en J et (CC') coupe (AB) en K.

A Position de I,J et K

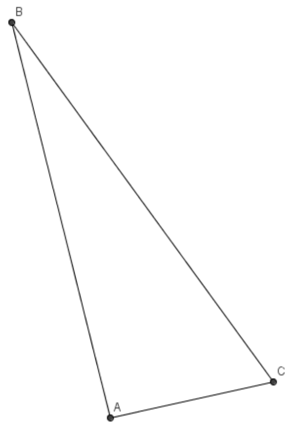
La parallèle à (A'C') passant par B' coupe (BC) en I'.

1) a) en considérant les triangles BB'I et CC'I, prouvez que $\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{II'} = \overrightarrow{I'C}$
   b) déduisez en que : $\overrightarrow{BI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$ [1]

2) par un raisonnement identique on pourrait montrer (et on ne vous demande pas de le faire) que $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ et que $\overrightarrow{AJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$ [2]

Quelles droites devrez-vous alors tracer pour obtenir ces résultats ?

3) On vous propose un triangle ABC (à droite), tracez le triangle A'B'C' associé.



B Repérage de A',B',C'

On considère le repère $(A, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ tel que $\overrightarrow{AB} = \vec{\imath}$ et $\overrightarrow{AC} = \vec{\jmath}$

4) Donnez les coordonnées de A, B et C.
5) a) en utilisant les relations [2], calculez les coordonnées de K et J.
   b) En utilisant la relation [1], démontrez que les coordonnées de I sont I$\left(\frac{2}{3};\frac{1}{3}\right)$
6) On note (x ; y) les coordonnées de C'.
   a) En traduisant la colinéarité des vecteurs $\overrightarrow{AC'}$ et $\overrightarrow{AI}$ démontrez que : x - 2y = 0.
   b) En traduisant la colinéarité des vecteurs $\overrightarrow{CC'}$ et $\overrightarrow{CK}$ démontrez que : 3x + y = 1.
   c) Calculez les coordonnées de C'.
7) Déduisez (ça ne se fait pas nécessairement de manière directe) les coordonnées de B' et A'.

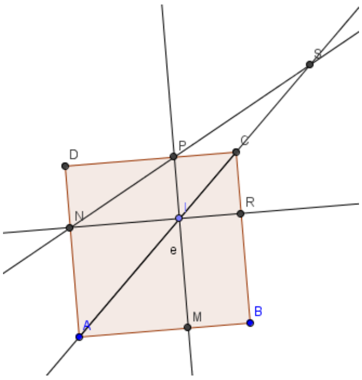
C Comparaison des aires

On note $\mathcal{A}$ l'aire de ABC et $\mathcal{A}'$ celle de A'B'C'

8) a) démontrez que les aires des triangles A'B'C' et AB'C' sont égales
   b) démontrez que les aires des triangles AB'C et AB'C' sont égales
9) Tracez les segments [BC'] et [CA'] (sur la première figure) et repérez en tenant compte de la question 8 tous les triangles ayant pour aire $\mathcal{A}'$
10) déduisez en que $\mathcal{A} = 7\mathcal{A}'$

Corrections

Exercice 1



1) voir figure ci-contre

2) I et S sont sur le segment [AC] donc $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires, donc il existe deux réels k et λ tel que $\overrightarrow{AI} = k.\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AS} = \lambda.\overrightarrow{AC}$

3) Dans le repère (A ;$\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AD}$) on a : I(k ;k) ; N(0 ;k) ;P(k ;1) ;R(1 ;k) ;M(k ;0) ; S(λ; λ)
NI = k et PC = k – 1

4) $\overrightarrow{CS}\binom{\lambda-1}{\lambda-1}$ et $\overrightarrow{IS}\binom{\lambda-k}{\lambda-k}$ comme on a : $\overrightarrow{AC}\binom{1}{1}$ on aura $\overrightarrow{CS} = (\lambda-1)\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{IS} = (\lambda-k)\overrightarrow{AC}$
Ainsi comme $(\lambda-1)$ et $(\lambda-k)$ sont positifs on aura $SC = (\lambda-1)AC$ et $SI = (\lambda-k)AC$

5) Dans NSI, la droite (PC) est parallèle au côté [NI] donc d'après le théorème de Thalès on a : $\frac{SP}{SN} = \frac{SC}{SI} = \frac{PC}{NI}$ et plus particulièrement on a : $\frac{SC}{SI} = \frac{PC}{NI}$ je remplace les longueurs par leurs expressions :
$\frac{(\lambda-1)AC}{(\lambda-k)AC} = \frac{1-k}{k}$ on peut simplifier la fraction de gauche : $\frac{\lambda-1}{\lambda-k} = \frac{1-k}{k}$ les produits des diagonales doivent être égaux donc
$(\lambda-1)k = (\lambda-k)(1-k)$ et donc $\lambda k - k = \lambda - k\lambda - k + k^2$ je regroupe les λ
$\lambda k - \lambda + k\lambda = k^2$ et donc $\lambda(2k-1) = k^2$ et donc $\lambda = \frac{k^2}{2k-1}$

6) $\overrightarrow{MR}\binom{1-k}{k-0}$ et $\overrightarrow{MS} = \overrightarrow{MI}\binom{k-k}{k-0} + \overrightarrow{IS}\binom{\lambda-k}{\lambda-k}$ donc et $\overrightarrow{MS}\binom{\lambda-k}{\lambda}$ or $\lambda = \frac{k^2}{2k-1}$ donc $\overrightarrow{MS}\begin{pmatrix}\frac{k^2}{2k-1}-k\\ \frac{k^2}{2k-1}\end{pmatrix}$

7) $\begin{pmatrix}\frac{k^2}{2k-1}-k\\ \frac{k^2}{2k-1}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{k^2}{2k-1}-\frac{2k^2\_k}{2k-1}\\ \frac{k^2}{2k-1}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{k-k^2}{2k-1}\\ \frac{k^2}{2k-1}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}(1-k)\frac{k}{2k-1}\\ k\frac{k}{2k-1}\end{pmatrix} = \frac{k}{2k-1}\binom{1-k}{k}$ donc $\overrightarrow{MS} = \frac{k}{2k-1}\overrightarrow{MR}$

8) $\overrightarrow{MS} et \overrightarrow{MR}$ étant colinéaires et de même origine on peut dire que les points M, S et R sont alignés.

Exercice 2

Dans le repère (C ;$\overrightarrow{CA}$;$\overrightarrow{CB}$) on a : $\overrightarrow{CR} = \frac{4}{3}\overrightarrow{CA}$ donc $\overrightarrow{CR}\begin{pmatrix}\frac{4}{3}\\ 0\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{CQ} = \frac{4}{7}\overrightarrow{CB}$donc $\overrightarrow{CQ}\begin{pmatrix}0\\ \frac{4}{7}\end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{AP} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$ or $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = -\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}$ donc $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{4}(-\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}) = \frac{-1}{4}\overrightarrow{CA} + \frac{1}{4}\overrightarrow{CB}$ ainsi $\overrightarrow{AP}\begin{pmatrix}\frac{-1}{4}\\ \frac{1}{4}\end{pmatrix}$

Cherchons les coordonnées de $\overrightarrow{RQ}$ et $\overrightarrow{RP}$

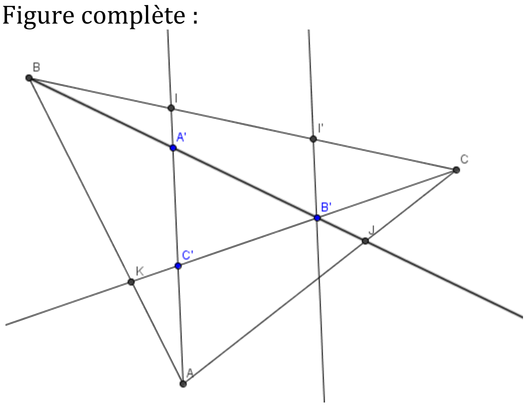
$\overrightarrow{RQ} = \overrightarrow{RC} + \overrightarrow{CQ} = -\overrightarrow{CR} + \overrightarrow{CQ}$ donc $\overrightarrow{RQ}\begin{pmatrix}-\frac{4}{3}+0\\ 0+\frac{4}{7}\end{pmatrix}$ ainsi $\overrightarrow{RQ}\begin{pmatrix}-\frac{4}{3}\\ \frac{4}{7}\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{RP} = \overrightarrow{RC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AP} = -\overrightarrow{CR} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AP}$ donc $\overrightarrow{RP}\begin{pmatrix}-\frac{4}{3}+1+\frac{-1}{4}\\ 0+0+\frac{1}{4}\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{RP}\begin{pmatrix}-\frac{7}{12}\\ \frac{1}{4}\end{pmatrix}$

pour vérifier si les vecteurs $\overrightarrow{RQ}$ et $\overrightarrow{RP}$ sont colinéaires j'effectue le déterminant
$d = -\frac{4}{3}\times\frac{1}{4} - \frac{4}{7}\times\left(-\frac{7}{12}\right) = -\frac{1}{3} + \frac{4}{12} = 0$ le déterminant étant nul les deux vecteurs sont colinéaires, et donc comme ils ont la même origine on peut dire que les points R, P et Q sont alignés

Exercice 3

Figure complète :



A Position de I, J et K

1a) C symétrique de C' par rapport à B' et B symétrique de B' par rapport à A' donc $\frac{BA'}{BB'} = \frac{CB'}{CC'} = \frac{1}{2}$

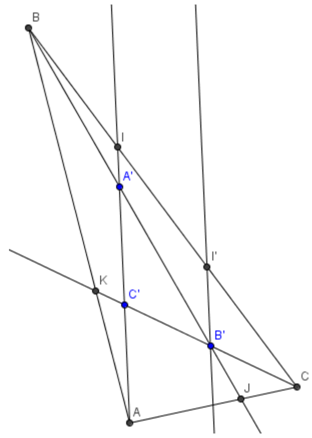
Si l'on considère le triangle BB'I' la droite (A'I), parallèle au côté [B'I'] coupe [BB'] en son milieu A' et donc d'après le théorème de Thalès on peut dire que $\frac{BA'}{BB'} = \frac{BI}{BI'}$ et donc $\frac{1}{2} = \frac{BI}{BI'}$ I milieu de [BI'].

De la même manière on peut prouver que $\frac{CB'}{CC'} = \frac{I'C}{IC}$ et donc $\frac{I'C}{IC} = \frac{1}{2}$ et donc I' milieu de [IC]

Ainsi on aura B, I, I' et C alignés dans cet ordre et BI = II' = I'C et donc $\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{II'} = \overrightarrow{I'C}$

b)

ainsi $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BI} + \overrightarrow{II'} + \overrightarrow{I'C} = 3\overrightarrow{BI}$ et donc $\overrightarrow{BI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$



2) si je trace la parallèle à (B'C') passant par A' et la parallèle à (A'B') passant par C' je pourrais faire apparaître, elles coupent respectivement [BA] en K' et [AC] en J'

3) voici le triangle A'B'C' associé à ABC. Pour le tracer, j'ai placé I, J et K respectivement sur [BC], [AC] et [AB] au tiers de ces segment en partant respectivement de B, C et A. Puis j'ai tracé les demi droites [AI), [BJ) et [CK).
[AI) , [BJ) se coupent en A' , [BJ) et [CK) se coupent en B' et pour terminer [AI) et [CK) se coupent en C'.

B Repérage de A', B' et C'

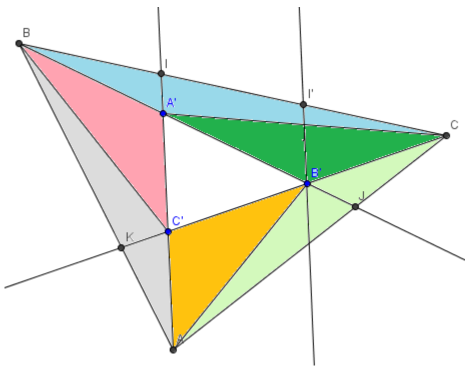
4) les coordonnées de A,B et C seront respectivement : (0 ;0), (1 ;0) et (0 ;1)
5) $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{3}\vec{\imath}$ donc K$\left(\frac{1}{3};0\right)$ $\overrightarrow{AJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{3}\vec{\jmath}$ donc J$\left(0;\frac{2}{3}\right)$
On sait que $\overrightarrow{BI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$ donc $\overrightarrow{BI} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right) = \frac{-1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$
$\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BI} = \overrightarrow{AB} + \frac{-1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ et donc I$\left(\frac{2}{3};\frac{1}{3}\right)$
6)
a) on a C'(x ;y) donc $\overrightarrow{AC'} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$ or C' est sur (AI) donc $\overrightarrow{AC'}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AI}\begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\\frac{1}{3}\end{pmatrix}$ sont colinéaires et donc le déterminant est nul ainsi $x\frac{1}{3} - y\frac{2}{3} = 0$ et donc x-2y = 0
b) $\overrightarrow{CK} = \overrightarrow{CA}\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix} + \overrightarrow{AK}\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\0\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{CK}\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\-1\end{pmatrix}$
$\overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{CA}\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix} + \overrightarrow{AC'}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ donc on a $\overrightarrow{CC'}\begin{pmatrix}x\\y-1\end{pmatrix}$, or C' est sur (CK) donc $\overrightarrow{CC'}$ et $\overrightarrow{CK}$ sont colinéaires et donc leur déterminant est nul. Donc $\frac{1}{3}(y-1) - (-1)x = 0$ donc (y -1) +3x = 0 et donc 3x + y = 1
c) pour trouver les coordonnées de C il suffit de résoudre le système $\begin{cases} x - 2y = 0 \\ 3x + y = 1 \end{cases}$

$\begin{cases} x - 2y = 0 \\ 3x + y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y = 0 \\ 6x + 2y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y = 0 \\ 7x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y = 0 \\ x = \frac{2}{7} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{2} = y \\ x = \frac{2}{7} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{7} = y \\ x = \frac{2}{7} \end{cases}$

On aura donc C'$\left(\frac{2}{7};\frac{1}{7}\right)$
7) $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AC'} + \overrightarrow{C'A'}$ or $\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{C'A'}$ et donc $\overrightarrow{AA'} = 2\overrightarrow{AC'}$ et or C$\left(\frac{2}{7};\frac{1}{7}\right)$ donc $\overrightarrow{AA'}\begin{pmatrix}\frac{4}{7}\\\frac{3}{7}\end{pmatrix}$ et donc A'$\left(\frac{4}{7};\frac{2}{7}\right)$
$\overrightarrow{C'B'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CC'}$ or $\overrightarrow{CC'}\begin{pmatrix}x\\y-1\end{pmatrix}$ avec x $= \frac{2}{7}$ et $y = \frac{1}{7}$ donc $\overrightarrow{CC'}\begin{pmatrix}\frac{2}{7}\\\frac{6}{7}\end{pmatrix}$ et donc $\overrightarrow{C'B'}\begin{pmatrix}\frac{1}{7}\\\frac{3}{7}\end{pmatrix}$
$\overrightarrow{AB'} = \overrightarrow{AC'}\begin{pmatrix}\frac{2}{7}\\\frac{1}{7}\end{pmatrix} + \overrightarrow{C'B'}\begin{pmatrix}\frac{1}{7}\\\frac{3}{7}\end{pmatrix}$ et donc $\overrightarrow{AB'}\begin{pmatrix}\frac{3}{7}\\\frac{4}{7}\end{pmatrix}$ et donc B'$\left(\frac{3}{7};\frac{4}{7}\right)$

C Comparaison des aires

8 a) Dans AB'A' la droite (B'C') est une médiane donc elle partage le triangle en deux mini triangles A'C'B' et C'B'A de même aire.
b) Dans AB'C la droite (B'A) est une médiane donc elle partage le triangle en deux mini triangles AC'B' et CB'A de même aire.



9) a) dans BC'B' la droite (C'A') est une médiane donc elle partage le triangle en deux mini triangles A'C'B' et C'BA' de même aire.
b) dans BA'A la droite (C'B) est une médiane donc elle partage le triangle en deux mini triangles AC'B et C'BA' de même aire.
c) dans CC'A' la droite (B'A') est une médiane donc elle partage le triangle en deux mini triangles A'C'B' et CB'A' de même aire.
d) dans BB'C la droite (CA') est une médiane donc elle partage le triangle en deux mini triangles A'CB et CB'A' de même aire.
Ainsi les sept triangles suivants ont la même aire A' : A'CB , CB'A', AC'B , C'BA', AC'B' , CB'A et A'C'B'

10 ces 7 triangles recouvrant complètement sans redondance le grand triangle ABC sont aire A vérifiera $A = 7A'$