Devoir surveillé n°4

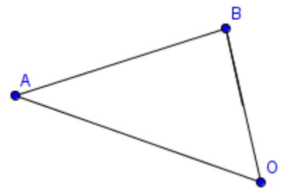
Exercice 1   (11 points)

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}; \vec{j})$ d'unité 1cm. On considère les points A(2 ; -1) et B(5 ; 3) .

1) Faire une figure que l'on complétera au fur et à mesure de l'exercice. (1pt)
2) Calculer les mesures exactes de AB, OA et OB. Le triangle AOB est-il rectangle ? (2pts + 1,5pts)
3) Soit C le symétrique de B par rapport à A. Construire C. Indiquez ses coordonnées (sans justifier). (1pt)
4) On appelle E le point E(3005 ; 4003). Les points A, B et E sont-ils alignés ? (1,5pts)
5) D est le point vérifiant $\overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AO}$. Déterminer les coordonnées de D, puis placer ce point. (2pts)
6) exprimez $\overrightarrow{DO}$ en fonction de $\overrightarrow{DA}$, en déduire ce que représente O pour le triangle BCD ? (2pts)

Exercice 2   (7 points)

OAB est un triangle, I est le milieu de [OA], J le milieu de [OB], K celui de [AB], L est le symétrique de I par rapport à A, M est le milieu de [JB].



1) Complétez la figure ci-contre. (1,5pts)
2) On se place dans le repère **$(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$**. Un élève donne de manière correcte, les coordonnées des points de la figure : O(0 ;0), I(1 ;0), J(0 ;1) , A(2 ;0), B(0 ;2), K(1 ;1), L(3 ;0) et M(0 ;1,5) Justifiez avec soin les coordonnées de A ,B,K,L et M. (4pts)
3) Démontrer que les points K, L, M sont alignés. (1,5pts)

Exercice 3   (5 points)

ABCD est un parallélogramme, M un point quelconque. La parallèle à (AB) passant par M, coupe (AD) en H et (BC) en F. La parallèle à (AD) passant par M coupe (AB) en E et (CD) en G.

1) Faire une figure (1,5pts)

On choisit le repère $\left(D; \overrightarrow{DC}; \overrightarrow{DA}\right)$ et on note $(x_M; y_M)$ les coordonnées de M.

2) Calculez les coordonnées de tous les points de la figure (en utilisant éventuellement x_M et y_M) aucune justification n'est demandée. (2pts)
3) Démontrez que $\overrightarrow{HG} + \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AC}$ (1,5pts)

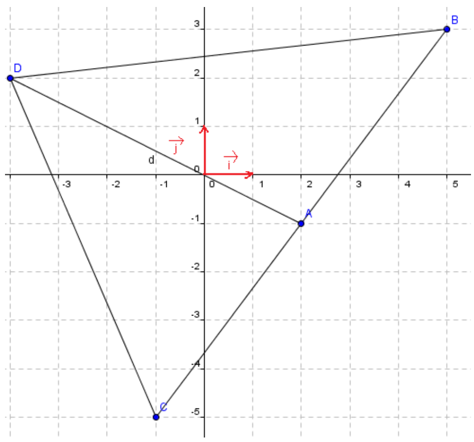
Exercice à faire à la maison

Proposez un programme demandant à l'utilisateur les coordonnées de deux points A et B et qui donnera en retour les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$, puis celles de I le milieu de [AB] et pour finir qui donnera $\left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2$ le carré de la norme de $\overrightarrow{AB}$.

Nom & Prénom : ……………………………………………………………… www.dimension-k.com

Correction

Exercice 1 (11 points)



1) 2) $AB=\sqrt{(5-2)^2+(3-(-1))^2}=\sqrt{3^2+4^2}=5\text{cm}$

$AO=\sqrt{(0-2)^2+(0-(-1))^2}=\sqrt{4+1}=\sqrt{5}\text{ cm}$

$OB=\sqrt{(5-0)^2+(3-0)^2}=\sqrt{25+9}=\sqrt{34}\text{cm}$

D'une part $OB^2=34$ et $AB^2+AO^2=5^2+5=30$ donc $OB^2\neq AB^2+AO^2$ donc d'après le théorème de Pythagore le triangle n'est pas rectangle.

3) C(-1 ;-5)

4)

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}5-2\\3-(-1)\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AB}\binom{3}{4}$ de plus $\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix}3005-2\\4003-(-1)\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AE}\binom{3003}{4004}$,

$\det(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AE})=3\times4004-4\times3003=0$ les deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AE}$ sont donc bien colinéaires et donc les points A, B et E sont alignés.

5)

$\overrightarrow{AD}=3\overrightarrow{AO}$ or $\overrightarrow{AO}\binom{-2}{+1}$ donc $3\overrightarrow{AO}\binom{-6}{+3}$ de plus $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}x_D-2\\y_D-(-1)\end{pmatrix}$ donc $\binom{-6}{+3}=\begin{pmatrix}x_D-2\\y_D-(-1)\end{pmatrix}$ donc $\begin{cases}-6=x_D-2\\3=y_D-(-1)\end{cases}$

$\begin{cases}-6+2=x_D\\3-1=y_D\end{cases}$ =>donc D(-4 ;2)

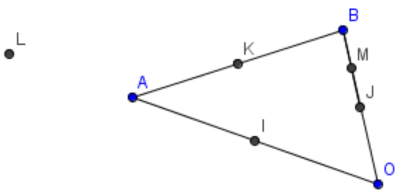
Méthode alternative : $\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{AO}=-2\overrightarrow{OA}$ or $\overrightarrow{OA}\binom{2}{-1}$ et donc $\overrightarrow{OD}\binom{-4}{2}$donc D(-4 ;2).

6)

$\overrightarrow{OD}=-2\overrightarrow{OA}$ donc $\overrightarrow{DO}=2\overrightarrow{OA}$ de plus $\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{DO}+\overrightarrow{OA}=3\overrightarrow{OA}$ donc $\frac{1}{3}\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{OA}$ donc $\overrightarrow{DO}=2\frac{1}{3}\overrightarrow{DA}$

Ainsi dans BCD, le point O est situé au $\frac{2}{3}$ de la médiane issue de D , donc c'est le centre de gravité du triangle BCD.

Exercice 2 (7 points)



2) O est le centre du repère est donc ses coordonnées sont : (0 ;0)

I est le milieu de [OA] donc $\overrightarrow{OA}=2\overrightarrow{OI}=2\overrightarrow{OI}+0\overrightarrow{OJ}$donc A(2 ;0)

J est le milieu de [OB] donc $\overrightarrow{OB}=2\overrightarrow{OJ}=0\overrightarrow{OI}+2\overrightarrow{OJ}$donc B(0 ;2)

A est le milieu de [LI] donc $\overrightarrow{AL}=\overrightarrow{IA}$ or $\overrightarrow{OI}=\overrightarrow{IA}$

donc $\overrightarrow{OL}=3\overrightarrow{OI}=3\overrightarrow{OI}+0\overrightarrow{OJ}$donc L(3 ;0)

M est le milieu de [BJ] donc $\overrightarrow{JM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{JB}$ or $\overrightarrow{JB}=\overrightarrow{OJ}$ donc

$\overrightarrow{OM}=\frac{3}{2}\overrightarrow{OJ}=0\overrightarrow{OI}+\frac{3}{2}\overrightarrow{OJ}$ donc M(0 ; $\frac{3}{2}$)

K est le milieu de [AB] donc $\overrightarrow{AK}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, donc $\overrightarrow{OK}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AK}=\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB})$

$=2\overrightarrow{OI}+\frac{1}{2}(-2\overrightarrow{OI}+2\overrightarrow{OJ})=2\overrightarrow{OI}-\overrightarrow{OI}+\overrightarrow{OJ}=1\overrightarrow{OI}+1\overrightarrow{OJ}$ donc K(1 ;1)

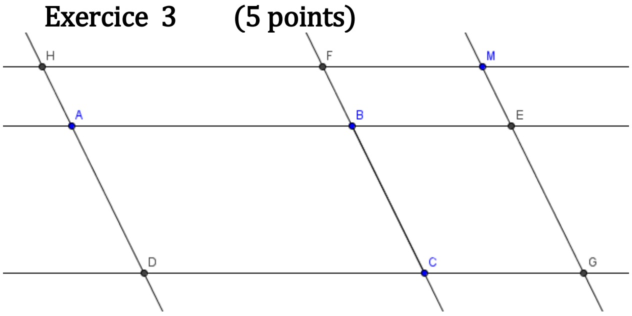
ou plus rapidement K est le milieu de [AB] donc K$\left(\frac{2+0}{2};\frac{0+2}{2}\right)$ donc K(1 ;1)

3) considérons les vecteurs $\overrightarrow{KL}$ et $\overrightarrow{KM}$: $\overrightarrow{KL}=\overrightarrow{KO}+\overrightarrow{OL}=-\overrightarrow{OK}+\overrightarrow{OL}$ donc $\overrightarrow{KL}\binom{-1+3}{-1+0}$ donc $\overrightarrow{KL}\binom{2}{-1}$

$\overrightarrow{KM}=\overrightarrow{KO}+\overrightarrow{OM}=-\overrightarrow{OK}+\overrightarrow{OM}$ donc $\overrightarrow{KM}\begin{pmatrix}-1+0\\-1+\frac{3}{2}\end{pmatrix}$ ainsi $\overrightarrow{KM}\binom{-1}{0{,}5}$

On peut remarquer que $\overrightarrow{KL}=-2\overrightarrow{KM}$ ou calculer $\det(\overrightarrow{KL};\overrightarrow{KM})$ et constater qu'il est nul, dans les deux cas la conclusion est la même $\overrightarrow{KL}$ et $\overrightarrow{KM}$ sont colinéaires et donc les points L,K et M sont alignés.

Exercice 3 (5 points)



2) D(0 ;0) , C(1 ;0) , A(0 ;1) , B(1 ;1) , M(x_M; y_M) , E(x_M; 1) , G(x_M; 0) , F(1; y_M) et H(0; y_M)

3) $\overrightarrow{HG}\begin{pmatrix}x_M-0\\0-y_M\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{HG}\begin{pmatrix}x_M\\-y_M\end{pmatrix}$ de plus $\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix}1-x_M\\y_M-1\end{pmatrix}$

Donc $(\overrightarrow{HG}+\overrightarrow{EF})\begin{pmatrix}x_M+1-x_M\\-y_M+y_M-1\end{pmatrix}$ Donc $(\overrightarrow{HG}+\overrightarrow{EF})\binom{1}{-1}$

Or $\overrightarrow{AC}\binom{1-0}{0-1}$ c'est-à-dire $\overrightarrow{AC}\binom{1}{-1}$

Conclusion : $\overrightarrow{HG}+\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AC}$

Nom & Prénom : ……………………………………………………………………..   www.dimension-k.com

Correction de l'exercice à faire à la maison

```
Disp ''COORDONNEES DE A''
Prompt X,Y
X->U
Y->V
Disp ''COORDONNEES DE B''
Prompt X,Y
Disp ''LE VECTEUR AB A'',''POUR COORDONNEES''
Disp X-U,Y-V
Pause
Disp ''I LE MILIEU DE [AB] A'',''POUR COORDONNEES''
Disp (X+U)/2, (Y+V)/2
Pause
Disp ''LE CARRE DE LA'',NORME DU'',''VECTEUR AB EST''
Disp (X-U)²+(Y-V)²
```