Entrainement au contrôle sur les vecteurs

Exercice 1 Soit A, B et C trois points non alignés.

1) Placez D tel que $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$

2) Quelle est la nature du quadrilatère ABDC ?

Soit O le point d'intersection de [AD] et [BC]. E le point vérifiant $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}$.

3) Déterminer les coordonnées de tous les points dans le repère (A ; $\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}$)

4) Prouvez que J, le point tel que $\overrightarrow{DJ} = 2\overrightarrow{DO} + 0{,}5\overrightarrow{AC}$, est le milieu de [AC]

5) Déterminez les coordonnées F le symétrique de D par rapport à B, en utilisant celles de D et de B

6) que peut on dire du quadrilatère ABEF ?

Exercice 2 Soit A, B et C trois points de coordonnées respectives (1 ;-3) ; (-1 ;-2) ; (1 ;2).Déterminer la nature du triangle ABC

Exercice 3 Soit A, B et C trois points de coordonnées respectives $(x_A; y_A)$; $(x_B; y_B)$; $(x_C; y_C)$ dans un repère $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$

1) Soit I le milieu de [AB] en déduire les coordonnées de I en fonction de celles de A et B.

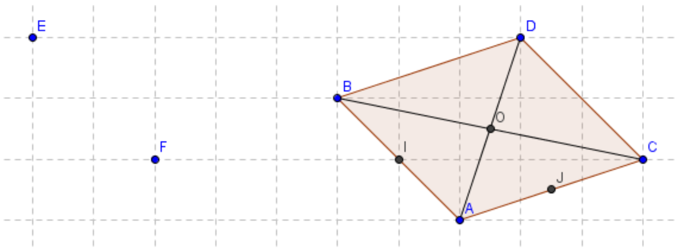
2) Que représente la droite (CI) pour le triangle ABC

3) Soit G le centre de gravité de ABC, prouvez que $\overrightarrow{CG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CI}$

4) En déduire une démonstration de la formule du cours donnant les coordonnées de G en fonction de celle de A, B et C.

5) Que vaut $\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{CG}$?

Correction



Exercice 1

2)

$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ Donc $\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$ Donc $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AC}$

Donc $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$ donc $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC}$ donc ABDC est un parallélogramme.

3)

on a **A(0 ;0), B(1 ;0) et C(0 ;1)** par définition du repère (A ; $\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}$)

$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ donc **D (1 ;1)**

Les parallélogrammes ont leurs diagonales qui se coupent en leur milieu donc O est le milieu de [AD] ;

donc $\overrightarrow{AO} = 0{,}5\overrightarrow{AD} = 0{,}5(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = 0{,}5\overrightarrow{AB} + 0{,}5\overrightarrow{AC}$ donc **O(0,5 ;0,5)**

$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}) = 2\overrightarrow{AB} - 1\overrightarrow{AC}$ donc **E(2 ;-1)**

4)

$\overrightarrow{DJ} = 2\overrightarrow{DO} + 0{,}5\overrightarrow{AC}$ donc $\overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DJ} = \overrightarrow{AD} + 2\overrightarrow{DO} + 0{,}5\overrightarrow{AC}$

Or O étant le milieu de [AD] on a $2\overrightarrow{DO} = -\overrightarrow{AD}$ et donc :

$\overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AD} + 0{,}5\overrightarrow{AC} = 0{,}5\,\overrightarrow{AC}$ donc J est le milieu de [AC], et **J(0 ;0,5)**.

5)

On sait que F le symétrique de D par rapport à B donc B est le milieu de [FD], donc $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{BF}$ donc $\overrightarrow{DB}\binom{1-1}{0-1} = \overrightarrow{BF}\binom{x_F-1}{y_{F-0}}$ or deux vecteurs sont égaux si et seulement si leurs coordonnées sont égales don on a (1-1) =$x_F - 1$ et 0-1=$y_F - 0$ donc $x_F = 1$ et $y_F = -1$

6) on sait que $\overrightarrow{AB}\binom{1}{0}$ de plus $\overrightarrow{FE}\binom{2-1}{-1-(-1)}$ donc $\overrightarrow{FE}\binom{1}{0}$ ainsi on a $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{FE}$ donc ABEF est un parallélogramme.

Exercice 2

AB=$\sqrt{(-1-1)^2 + (-2-(-3))^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$ AC=$\sqrt{(1-1)^2 + (2-(-3))^2} = \sqrt{0+25} = 5$

CB=$\sqrt{(-1-1)^2 + (-2-2)^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20}$

On a donc AC²=AB²+CB² donc d'après la réciproque du théorème de Pythagore on peut affirmer que le triangle est rectangle en B.

Exercice 3

Soit A, B et C trois points de coordonnées respectives $(x_A; y_A)$; $(x_B; y_B)$; $(x_C; y_C)$ dans un repère $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$

1) I$\left(\frac{x_A+x_B}{2}; \frac{y_A+y_B}{2}\right)$ 2) la droite (CI) est la médiane issue de C pour le triangle ABC.

3) Soit G le centre de gravité de ABC, donc d'après le cours de 4$^{\text{ème}}$ on a G qui est sur toutes les médianes donc sur (CI) et en plus elle sera au deux tiers en partant du sommet, ainsi $\overrightarrow{CG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CI}$

4) On veut les coordonnées de G on peut les obtenir en trouvant les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OG}$.

$\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{OC} + \frac{2}{3}\overrightarrow{CI}$ on a $\overrightarrow{CI}\begin{pmatrix}\frac{x_A+x_B}{2} - x_C \\ \frac{y_A+y_B}{2} - y_C\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{CI}\begin{pmatrix}\frac{x_A+x_B-2x_C}{2} \\ \frac{y_A+y_B-2y_C}{2}\end{pmatrix}$ donc $\frac{2}{3}\overrightarrow{CI}\begin{pmatrix}\frac{x_A+x_B-2x_C}{3} \\ \frac{y_A+y_B-2y_C}{3}\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{OC}\binom{x_C}{y_C}$ donc $\overrightarrow{OG}\begin{pmatrix}\frac{x_A+x_B-2x_C}{3} + x_C \\ \frac{y_A+y_B-2y_C}{3} + y_C\end{pmatrix}$ donc

$\overrightarrow{OG}\begin{pmatrix}\frac{x_A+x_B+x_C}{3} \\ \frac{y_A+y_B+y_C}{3}\end{pmatrix}$ Donc G$\left(\frac{x_A+x_B+x_C}{3}; \frac{y_A+y_B+y_C}{3}\right)$

5) On sait que $\frac{2}{3}\overrightarrow{CI}\begin{pmatrix}\frac{x_A+x_B-2x_C}{3} \\ \frac{y_A+y_B-2y_C}{3}\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{CG}\begin{pmatrix}\frac{x_A+x_B-2x_C}{3} \\ \frac{y_A+y_B-2y_C}{3}\end{pmatrix}$ de plus on a :$\overrightarrow{AG}\begin{pmatrix}\frac{-2x_A+x_B+x_C}{3} \\ \frac{-2y_A+y_B+y_C}{3}\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BG}\begin{pmatrix}\frac{x_A-2x_B+x_C}{3} \\ \frac{y_A-2y_B+y_C}{3}\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{CG} = \vec{0}$ (les coordonnées s'annulent)