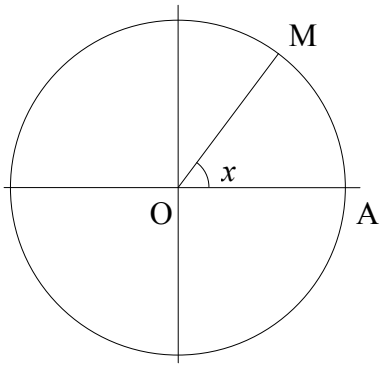
I. Le cercle trigonométrique

Définition.
Dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O;\vec{i};\vec{j})$, le **cercle trigonométrique** est le cercle de centre O et de rayon 1 sur lequel on choisit une orientation : le sens direct ou sens inverse des aiguilles d'une montre.

Remarque.
Dans le cercle trigonométrique de centre O, on considère l'angle $\widehat{AOM} = x$ en degré. L'arc de cercle $\widehat{AM}$ de centre O a une longueur l qui est proportionnel à x.



Angle en degré	360	x
Longueur l	$2\pi\times R=2\pi\times 1=2\pi$	l

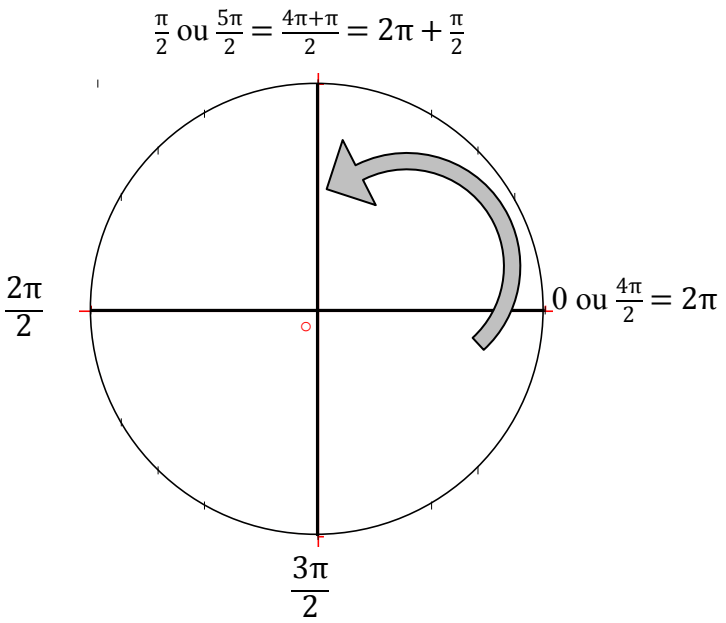
donc $l = \frac{2\pi\times x}{360} = \frac{2\pi}{360}\times x$

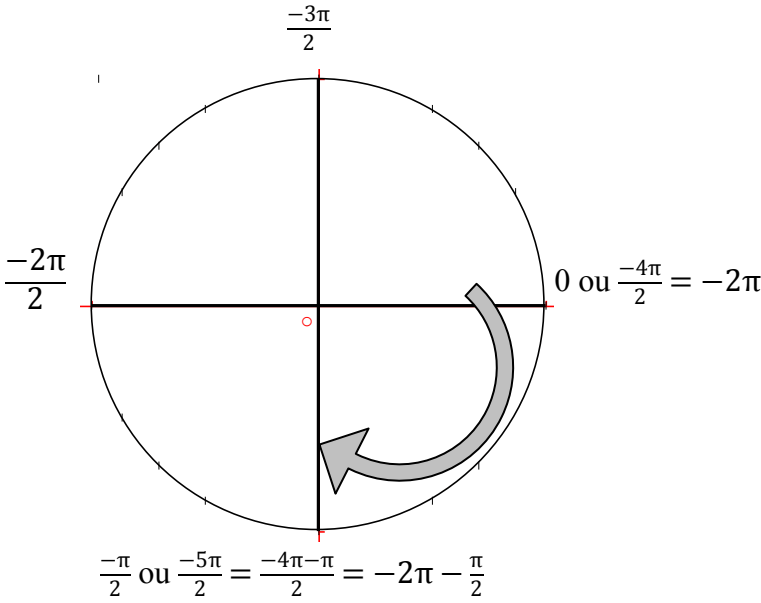
Définition.
l est appelée la mesure en **radian** de l'angle $\widehat{AOM}$

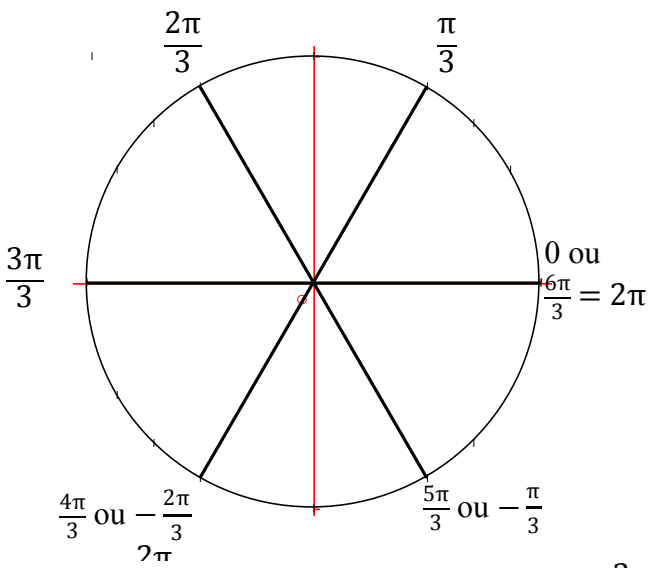
Propriété.
Les mesures en degré et en radian de l'angle $\widehat{AOM}$ sont proportionnelles.

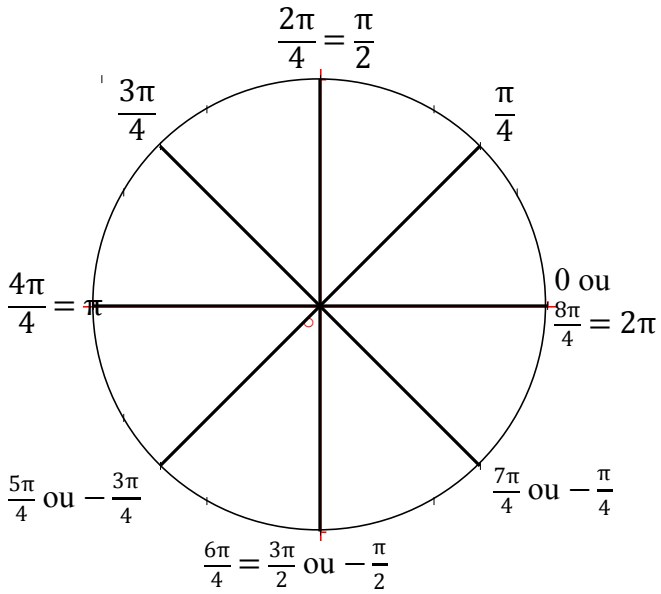
Angle en degré	0	30°	45°	60°	90°	180°
Angle en radian	0	$\frac{2\pi\times 30}{360}=\frac{\pi}{6}$	$\frac{2\pi\times 45}{360}=\frac{\pi}{4}$	$\frac{2\pi\times 60}{360}=\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi\times 90}{360}=\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi\times 180}{360}=\pi$

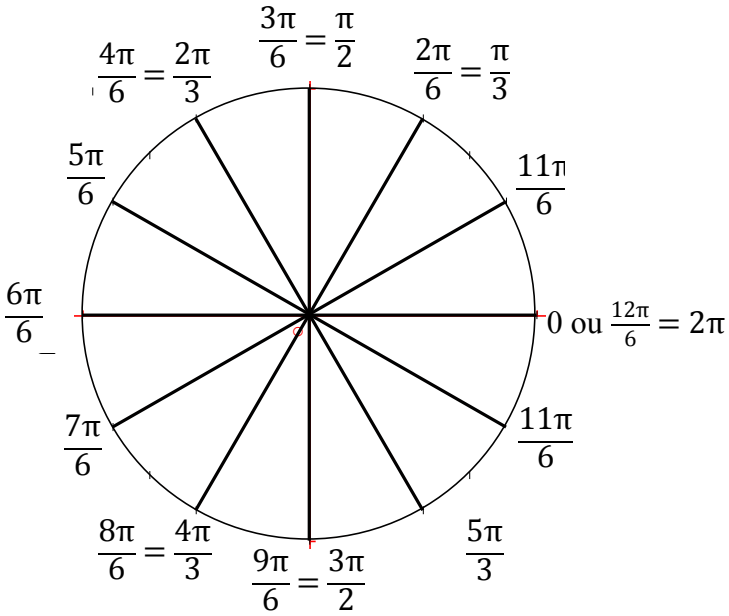
Cercle trigonométrique.











Remarques.

- Chaque point M du cercle est repéré par un nombre qui n'est pas unique, ce nombre correspond à la mesure en radian de l'angle formé par l'axe des abscisses et [OM].
- **2π représente un tour complet** dans le sens direct, -2π un tour complet dans le sens indirect.
$2k\pi$ où $k\in\mathbb{Z}$, représente k tours complets, si $k>0$, dans le sens direct et si $k<0$, dans le sens indirect.
- **π représente un demi-tour** dans le sens direct, $-\pi$ un tour demi-tour dans le sens indirect.
$k\pi$ où $k\in \mathbb{Z}$, représente k demi-tours, si $k>0$, dans le sens direct et si $k<0$, dans le sens indirect.

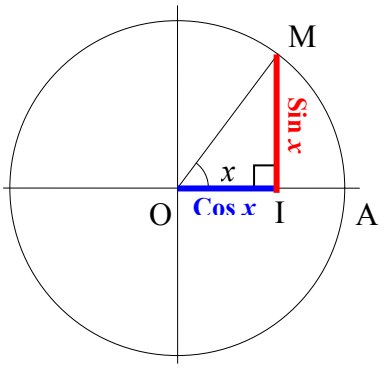
Définition.
Parmi tous les réels qui repère un point, il existe une valeur unique dans l'intervalle $]-\pi,\pi]$.
Cette valeur est appelée mesure principale de l'angle.

Exemples.
Soit l'angle $x = \frac{39\pi}{4}$, $\frac{39\pi}{4} = \frac{40\pi-\pi}{4} = 5\times 2\pi - \frac{\pi}{4}$. La mesure principale de $\frac{39\pi}{4}$ est $-\frac{\pi}{4}$.

II. Cosinus, sinus et tangente d'un angle

On place le cercle trigonométrique dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ d'origine le centre du cercle et tel que l'angle 0 corresponde au 1 de l'axe des abscisses.
On considère un angle x et M le point du cercle tel que $\widehat{AOM} = x$.
$\cos x = \frac{adjac\ ent}{hypot\ énuse} = \frac{x_M}{1} = x_M$ l'abscisse du point M.
$\sin x = \frac{oppos\ Ž}{hypot\ énuse} = \frac{y_M}{1} = y_M$ l'ordonnée du point M.

Alors, les coordonnées de M en fonction de x sont : M(cos x ; sin x)



Propriétés.
- $(\cos x)^2 + (\sin x)^2 = \cos^2 x + \sin^2 x = 1$
- $\cos(x + 2\pi) = \cos x$ et $\sin(x + 2\pi) = \sin x$, 2π correspond à un tour complet, les coordonnées sont identiques.
- $\cos(x + 2k\pi) = \cos x$ et $\sin(x + 2k\pi) = \sin x$, $k \in \mathbb{Z}$. $2k\pi$ correspond à k tours complets, les coordonnées ne sont pas changées.

Définition.
$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ partout où $\cos x \neq 0$, c'est à dire pour tout $x \in R - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi; k \in Z\right\}$

Valeurs remarquables :
- Lorsque $\widehat{AOM} = \frac{\pi}{4}$ (45°), le triangle OIM est rectangle et isocèle donc :

$$\cos\frac{\pi}{4} = \sin\frac{\pi}{4} \text{ or } \cos^2\frac{\pi}{4} + \sin^2\frac{\pi}{4} = 1 \text{ donc } 2\cos^2\frac{\pi}{4} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \cos^2\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos\frac{\pi}{4} = \sin\frac{\pi}{4} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

- Lorsque $\widehat{AOM} = \frac{\pi}{3}$ (60°), on a $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ or $\cos^2\frac{\pi}{3} + \sin^2\frac{\pi}{3} = 1$ donc $\frac{1}{4} + \sin^2\frac{\pi}{3} = 1$

$$\Leftrightarrow \quad \sin^2\frac{\pi}{3} = \frac{3}{4} \quad \Leftrightarrow \quad \sin\frac{\pi}{3} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

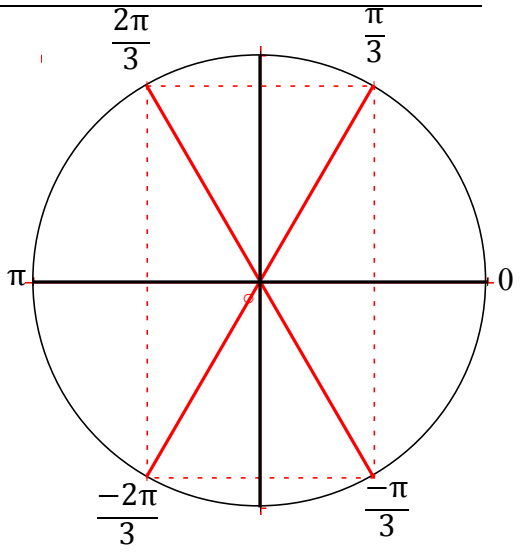
- Lorsque $\widehat{AOM} = \frac{\pi}{6}$ (30°), on a $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ or $\cos^2\frac{\pi}{6} + \sin^2\frac{\pi}{6} = 1$ donc $\frac{1}{4} + \cos^2\frac{\pi}{6} = 1$

$$\Leftrightarrow \quad \cos^2\frac{\pi}{6} = \frac{3}{4} \quad \Leftrightarrow \quad \cos\frac{\pi}{6} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Tableau de synthèse.

Angle x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
Sin x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
Cos x	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	–1
Tan x	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	Non défini	0

Méthode.
On obtient les autres angles par symétrie :
$\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$ $\quad\cos\frac{-\pi}{3}=\frac{1}{2}$ mais $\cos\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2}$ $\quad\cos\frac{-2\pi}{3}=-\frac{1}{2}$
$\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad\sin\frac{2\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ mais $\sin\frac{-\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad\sin\frac{-2\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$



Exemples.
►1. Déterminer $\cos\frac{5\pi}{6}$, $\sin\frac{-3\pi}{4}$, $\sin\frac{3\pi}{2}$ et $\cos\frac{-\pi}{6}$ en illustrant avec un dessin.
$\cos\frac{5\pi}{6}=\frac{-\sqrt{3}}{2}$, $\sin\frac{-3\pi}{4}=\frac{-\sqrt{2}}{2}$, $\sin\frac{3\pi}{2}=-1$ et $\cos\frac{-\pi}{6}=\frac{1}{2}$.

►2. Soit $x\in\left[\frac{3\pi}{2};2\pi\right]$ tel que $\cos x=\frac{2}{3}$. Déterminer $\sin x$ et $\tan x$.
$\cos^2x+\sin^2x=1$ donc $\frac{4}{9}+\sin^2x=1 \quad\Leftrightarrow\quad \sin^2x=\frac{5}{9} \quad\Leftrightarrow\quad \sin x=\sqrt{\frac{5}{9}}=\frac{\sqrt{5}}{3}$.

III. Fonctions cosinus et sinus

Ensemble de définition.
Les fonctions $x\mapsto\sin x$ et $x\mapsto\cos x$ sont définies sur$\mathbb{R}$.

Parité des fonctions.
Pour tout réel x, $\sin(-x)=-\sin x$, la fonction sinus est impaire. La courbe de la fonction $x\mapsto\sin x$ est symétrique par rapport à l'origine.
Pour tout réel x, $\cos(-x)=\cos x$, la fonction cosinus est paire. La courbe de la fonction $x\mapsto\cos x$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

Périodicité des fonctions.
Définition. Fonction périodique
On dit que f est **T–périodique** lorsqu'il existe un nombre réel T tel que $f(x+\mathrm{T})=f(x)$ pour tout $x\in D_f$ et $x+\mathrm{T}\in D_f$.

Remarque.
La courbe d'une fonction T–périodique dans un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ se répète par translation de vecteur $\mathrm{T}\vec{i}$.

Exemple.
Pour tout réel x, $\sin(x+2\pi)=\sin x$, la fonction sinus est 2π–périodique.
Pour tout réel x, $\cos(x+2\pi)=\cos x$, la fonction cosinus est 2π–périodique.

Variations des fonctions.

Les fonctions sinus et cosinus sont 2π–périodique, il suffit donc des les étudier entre –π et π. De plus, sinus est impaire et cosinus est paire, on peut donc encore restreindre l'étude à l'intervalle [0,π]. Le reste se complètera par symétrie et translation.

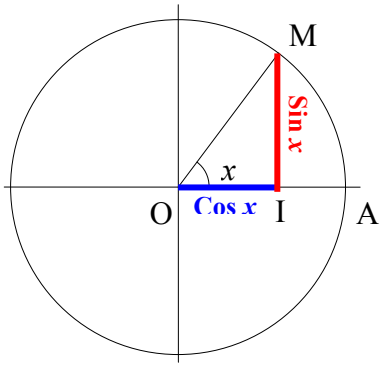
Sur le cercle trigonométrique dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$, on considère un angle $x \in [0,\pi]$ et M le point du cercle tel que $\widehat{AOM} = x$.

cos x est l'abscisse de M.

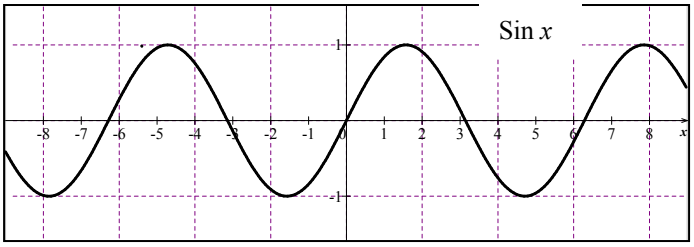
x	0		π
Cos x	1	↘	–1

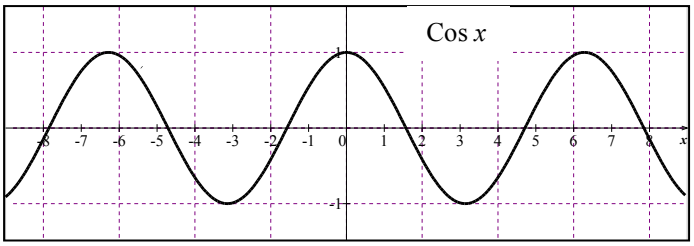
sin x est l'ordonnée de M.

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
Sin x	0	↗	1	↘	0



x	0	0,5	1	$\frac{\pi}{2} \approx 1{,}6$	2	2,5	$\pi \approx 3{,}1$
Sin x	0	0,5	0,8	1	0,9	0,6	0
Cos x	1	0,9	0,5	0	–0,4	–0,8	–1





Variations des fonctions.

Les fonctions sinus et cosinus sont 2π–périodique, il suffit donc des les étudier entre $-\pi$ et π. De plus, sinus est impaire et cosinus est paire, on peut donc encore restreindre l'étude à l'intervalle $[0,\pi]$. Le reste se complètera par symétrie et translation.

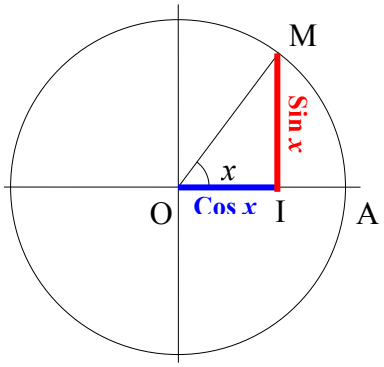
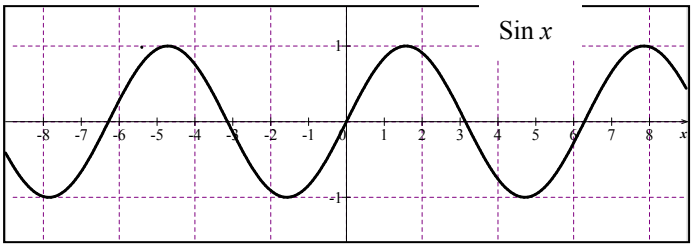
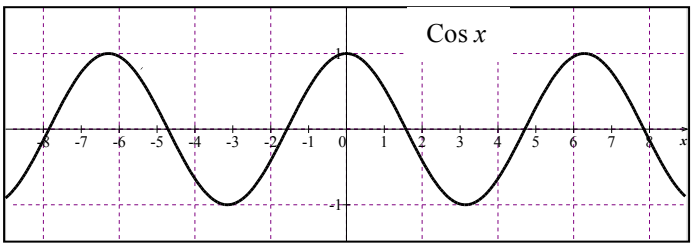
Sur le cercle trigonométrique dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$, on considère un angle $x\in[0,\pi]$ et M le point du cercle tel que $\widehat{AOM} = x$.

cos x est l'abscisse de M.

x	0		π
Cos x	1	$\searrow$	-1

sin x est l'ordonnée de M.

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
Sin x	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0



x	0	0,5	1	$\frac{\pi}{2} \approx 1{,}6$	2	2,5	$\pi \approx 3{,}1$
Sin x	0	0,5	0,8	1	0,9	0,6	0
Cos x	1	0,9	0,5	0	–0,4	–0,8	–1