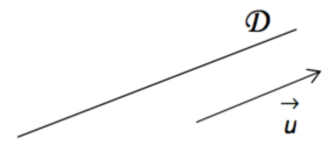
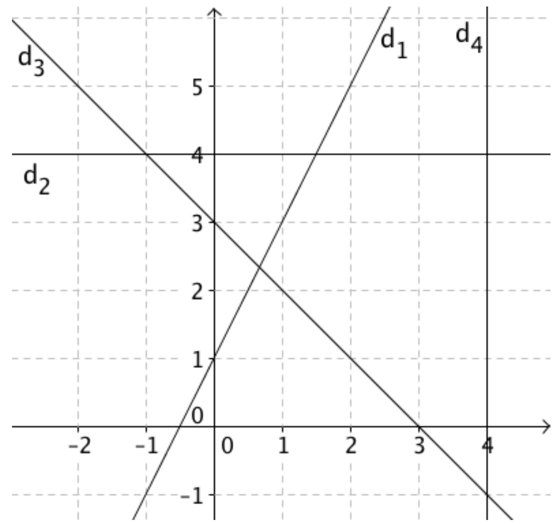
DROITES DU PLAN

I. Vecteur directeur d'une droite

Définition :
D est une droite du plan.
On appelle vecteur directeur de D tout vecteur non nul $\vec{u}$ qui possède la même direction que la droite D.



Méthode 1 : Déterminer graphiquement un vecteur directeur d'une droite
Soit $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ un repère du plan.
Donner des vecteurs directeurs des droites d_1, d_2, d_3 et d_4.



II. Équation cartésienne d'une droite

Théorème et définition :
Toute droite D admet une équation de la forme $ax + by + c = 0$ avec $(a\,;b) \neq (0\,;0)$.
Un vecteur directeur de D est $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$.
Cette équation est appelée **équation cartésienne** de la droite D.

Exemple :
Soit une droite *d* d'équation cartésienne $4x - 5y - 1 = 0$.
Alors le vecteur $\vec{u}$ de coordonnées (5 ; 4) est un vecteur directeur de *d*.

Théorème réciproque :
L'ensemble des points M(x ; y) tels que $ax + by + c = 0$ avec $(a\,;b) \neq (0\,;0)$ est une droite D de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$.

Méthode 2 : Déterminer une équation cartésienne de droite à partir d'un point et d'un vecteur directeur

On considère un repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ du plan.
1) Déterminer une équation cartésienne de la droite *d* passant par le point *A*(3 ; 1) et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\5\end{pmatrix}$.

2) Déterminer une équation cartésienne de la droite *d'* passant par les points *B*(5 ; 3) et *C*(1 ; –3).
(version 1 : exploitation du premier théorème / version 2 : déterminant)

<u>Méthode 3 :</u> Tracer une droite dans un repère

Tracer la droite d'équation $-3x + 4y + 5 = 0$

III. Équation réduite d'une droite

1) De l'équation cartésienne à l'équation réduite

- Si $b \neq 0$, alors l'équation cartésienne $ax + by + c = 0$ de la droite D peut être ramenée à une équation réduite $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$. Et on note $m = -\frac{a}{b}$ et $p = -\frac{c}{b}$.

<u>Vocabulaire :</u> - m est appelé la **pente** ou le **coefficient directeur** de la droite D.
- p est appelé l'**ordonnée à l'origine** de la droite D.

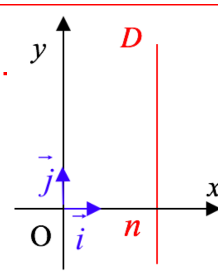
<u>Remarque :</u> Dans l'équation réduite, on retrouve l'expression d'une fonction affine.

- Si $b = 0$, alors l'équation cartésienne $ax + by + c = 0$ de la droite D peut être ramenée à l'équation réduite $x = -\frac{c}{a}$. Dans ce cas, la droite D est parallèle à l'axe des ordonnées.

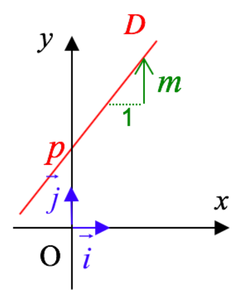
<u>Exemple :</u> Soit *d* dont une droite d'équation cartésienne $4x + y - 6 = 0$.
Son équation réduite est $y = -4x + 6$.

<u>Propriété :</u>
Soit $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ un repère du plan. Soit D une droite du plan.

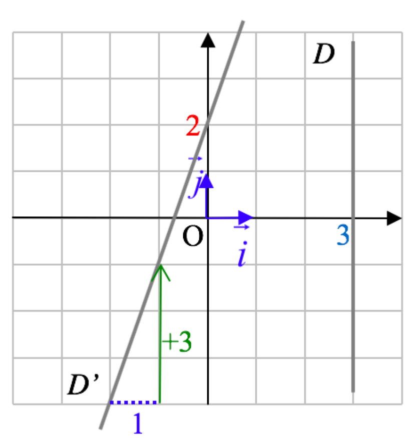
- <u>Si D est parallèle à l'axe des ordonnées :</u>
alors l'équation de D est de la forme $x = n$,
où n est un nombre réel.



- <u>Si D n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées :</u>
alors l'équation de D est de la forme $y = mx + p$,
où m et p sont deux nombres réels.



<u>Exercice 1 :</u>
Donner le coefficient directeur et l'ordonnée à l'origine de :
1) chacune des droites d'équations :
a) $y = -2x + 3$
b) $y = 5$
c) $4x + 2y = 1$
2) des droites dessinées sur la figure ci-contre :



Méthode 4 : Représenter graphiquement une droite d'équation réduite donnée
Soit $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ un repère du plan.
Dans ce repère, tracer les droites d_1, d_2 et d_3 d'équations réduites respectives :
$y = 2x + 3$,
$y = 4$,
$x = 3$.

Propriété réciproque :
Soit $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ un repère du plan et m, p, n trois nombres réels, m étant non nul.
L'ensemble des points M du plan dont les coordonnées $(x;y)$ sont tels que :
$y = mx + p$ ou $x = n$, est une droite.

Méthode 5 : Vérifier si un point appartient à une droite d'équation donnée

Soit $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ un repère du plan.
Les points A$(6{,}4\,;42)$ et B$(346;2419)$ appartiennent-ils à la droite *d* d'équation $y = 7x - 3$?

Remarque : Pour démontrer que 3 points A, B et C sont alignés, il suffit de montrer par exemple que le point A vérifie l'équation de la droite (BC).

Passer d'une équation cartésienne à l'équation réduite et réciproquement :

2) Pente d'une droite

Propriété :
Si A$\binom{x_A}{y_A}$ et B$\binom{x_B}{y_B}$ sont deux points distincts d'une droite D tel que $x_A \neq x_B$ alors la droite D a pour pente (ou coefficient directeur) $m = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.

Méthode 6 : Déterminer une équation réduite de droite dont on connaît deux points

Soit $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ un repère du plan.
Soit A$(4;-1)$ et B$(3;5)$ deux points d'une droite *d*.
Déterminer une équation de la droite *d*.

ALGORITHME

```
def droite(xA,yA,xB,yB):
    m=...
    p=...
    print('y=',m,'x+',p)
```

TP avec Python : Déterminer une équation de droite passant par deux points donnés
https://www.maths-et-tiques.fr/telech/Algo_EqDroite.pdf

IV. Position relative de deux droites

1) A partir l'aide de l'équation cartésienne

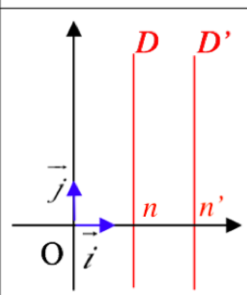
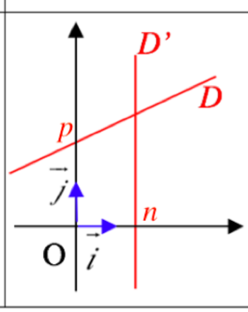
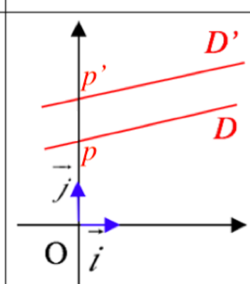
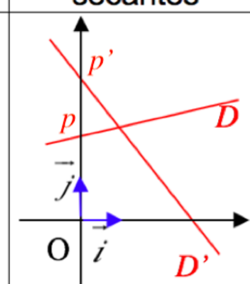
Propriété :
Soit $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ un repère du plan.
Dire que D et D' sont parallèles entre-elles équivaut à dire qu'elles ont des vecteurs directeurs colinéaires.

Méthode 7 : Démontrer que deux droites sont parallèles
Démontrer que les droites d_1 et d_2 d'équations respectives $6x-10y-5=0$ et $-9x+15y=0$ sont parallèles.

2) A l'aide de l'équation réduite

Propriété :
Soit $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ un repère du plan.
Soit D et D' deux droites non parallèles à l'axe des ordonnées.
Dire que D et D' sont parallèles entre-elles équivaut à dire qu'elles ont le même coefficient directeur.

Tableau récapitulatif :

Equation de D	$x=n$	$y=mx+p$	$y=mx+p$	
Equation de D'	$x=n'$	$x=n$	$y=m'x+p'$	
Position de D et D'	D // D'	D et D' sont sécantes	Si $m=m'$	Si $m\neq m'$
			D // D'	D et D' sont sécantes
Représentation				

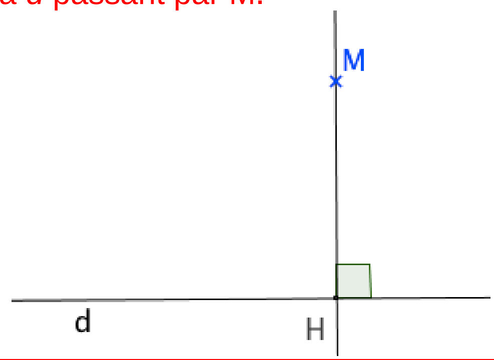
<u>Exemples :</u>
Dans un repère du plan, d_1, d_2 et d_3 admettent pour équations respectives :

$$y = 3x + 4,\ \ y = 3x + 9,\ x = 8$$

Les droites d_1 et d_2 sont parallèles car elles ont un coefficient directeur égal à 3.
Les droites d_1 et d_3 sont sécantes.

V. Projeté orthogonal d'un point sur une droite

<u>Définition :</u> Soit une droite *d* et un point M du plan.
Le <u>projeté orthogonal</u> du point M sur la droite *d* est le point d'intersection H de la droite *d* avec la perpendiculaire à *d* passant par M.

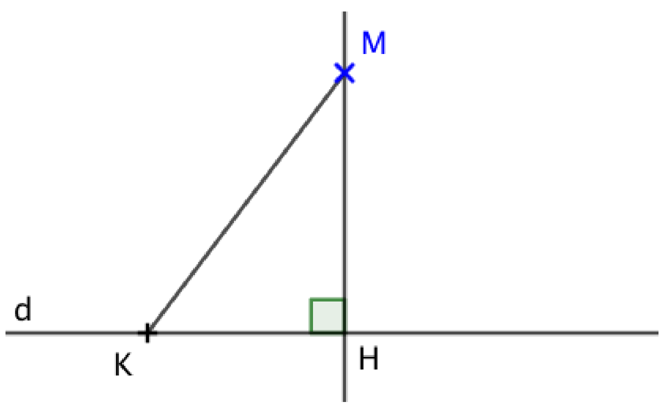


<u>Propriété :</u> Le projeté orthogonal du point M sur la droite *d* est le point de la droite *d* le plus proche du point M.

<u>Démonstration au programme :</u>

Vidéo https://youtu.be/DohZ0ehR_rw

Soit H le projeté orthogonal du point M sur la droite d.
Supposons qu'il existe un point K de la droite *d* plus proche de M que l'est le point H.



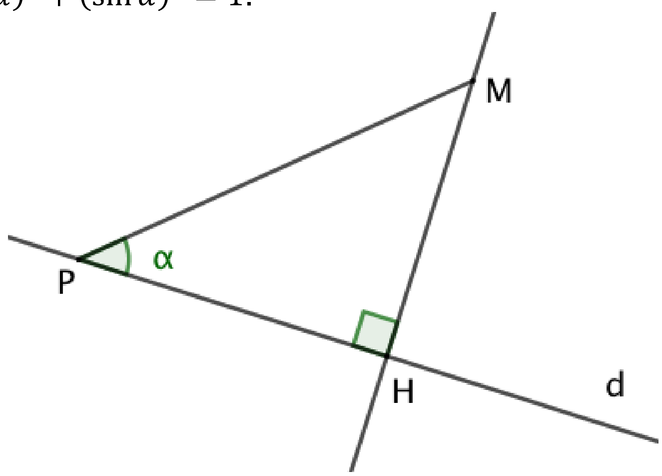
$KM\ \leq HM$ car K est le point de la droite le plus proche de M.
Donc $KM^2\ \leq HM^2$.
Or, d'après l'égalité de Pythagore, on a : $HM^2 + HK^2 = KM^2$

Donc $HM^2 + HK^2 \leq HM^2$.
Donc $HK^2 \leq 0$. Ce qui est impossible sauf dans le cas où le point K est le point H.
On en déduit que H est le point de la droite le plus proche du point M.

Méthode : Démontrer (au programme) que $(\cos\alpha)^2 + (\sin\alpha)^2 = 1$

Vidéo https://youtu.be/9r2qDd7EkMo

Soit une droite *d* et un point P appartenant à *d*.
Soit un point M n'appartenant pas à *d*.
On appelle H le projeté orthogonal du point M sur la droite *d*.
On note **α** l'angle $\widehat{MPH}$.
Démontrer que $(\cos\alpha)^2 + (\sin\alpha)^2 = 1$.



Le triangle PHM est rectangle en H, on a donc : $\cos\alpha = \frac{PH}{PM}$ soit $PH = PM \times \cos\alpha$.
De même, on a : $\sin\alpha = \frac{HM}{PM}$ soit $HM = PM \times \sin\alpha$.

D'après le théorème de Pythagore, on a : $PH^2 + HM^2 = PM^2$
Soit en remplaçant : $(PM \times \cos\alpha)^2 + (PM \times \sin\alpha)^2 = PM^2$
Soit encore : $PM^2 \times (\cos\alpha)^2 + PM^2 \times (\sin\alpha)^2 = PM^2$
Soit encore : $PM^2((\cos\alpha)^2 + (\sin\alpha)^2) = PM^2 \times 1$
Soit enfin, en divisant à droite et à gauche par PM^2 on obtient : $(\cos\alpha)^2 + (\sin\alpha)^2 = 1$.