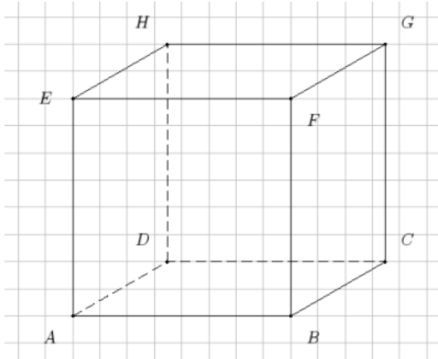
Chapitre :

Géométrie dans l'espace

I. Représentation en perspective cavalière

Définition : La **perspective cavalière** est une technique de représentation de l'espace sur un support plat (tableau, feuille, etc.). Elle suit les règles suivantes :

- Les plans parallèles au support choisi (appelé plans frontaux) sont représentés en vraie grandeur ;
- toute droite perpendiculaire aux plans frontaux (appelée fuyante) sont représentées par des droites faisant avec l'horizontale un angle $\propto$ donné ;
- sur les fuyantes, les longueurs sont multipliées par un rapport de réduction k donné ;
- les lignes cachées sont représentées en pointillés.



Exemple : Sur la figure ci-dessus, on a choisi $\propto = 30°$ et $k = \frac{1}{2}$.

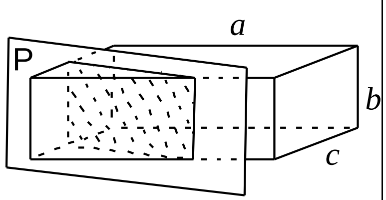
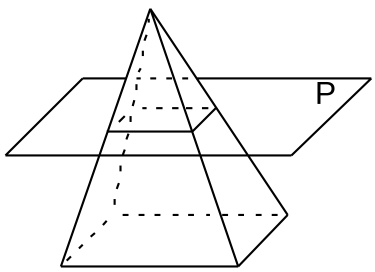
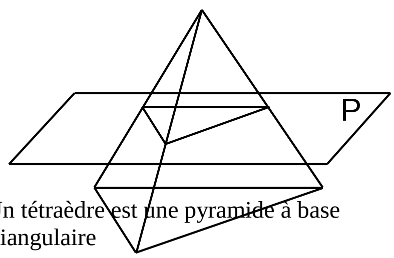
La figure représentée est le cube *ABCDEFGH*.

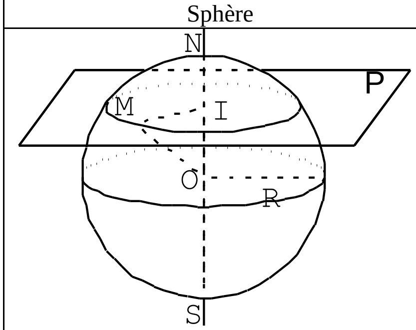
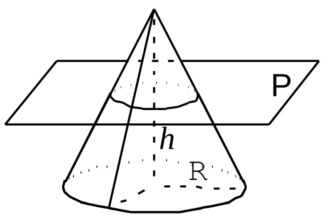
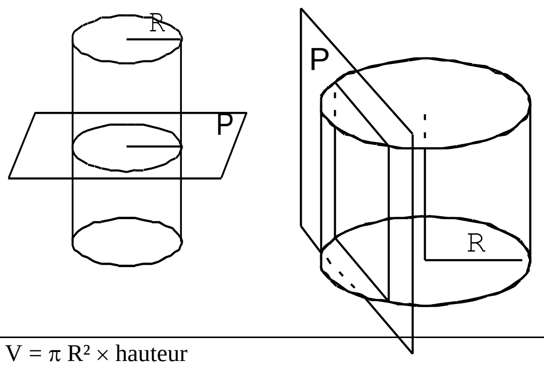
- les faces *ABFE* et *DCGH* sont situés dan des plans frontaux ;
- les droites (AD), (EH), (FG) et (BC) sont des fuyantes. Elles sont perpendiculaires aux plans frontaux mais sont représentées comme faisant un angle de 30° avec l'horizontale ;
- la figure étant un cube, on a $AE = EH$, mais dans la représentation, on a : $EH = \frac{1}{2}AE$.

Propriété :
Lors d'une représentation en perspective cavalière, l'alignement, le parallélisme, les rapports de longueur de segments parallèles et les milieux sont conservés.

Remarque :
Par contre, les mesures des angles ne sont pas conservées (sauf dans les plans frontaux).

II. volumes et sections

Pavé droit	Pyramide	Tétraèdre
		 Un tétraèdre est une pyramide à base triangulaire
V = abc Si le plan P est parallèle à une arête, la section est un rectangle.	V = $\frac{1}{3}$ Base × hauteur Si P est parallèle à la base, la section est un polygone dont les côtés sont parallèles à ceux de la base.	V = $\frac{1}{3}$ Base × hauteur Si P est parallèle à l'une des faces, la section est un triangle dont les côtés sont parallèles à ceux de la base

Sphère	cône de révolution	cylindre de révolution
		
V = $\frac{4}{3}\pi R^3$ La section est un cercle. Si [NS] est le diamètre de la sphère, orthogonal au plan P en I, alors I est le centre du cercle.	V = $\frac{1}{3}(\pi R^2) \times h$ Si P est parallèle à la base, la section est un cercle dont le centre se trouve sur l'axe du cône.	V = $\pi R^2 \times$ hauteur • Si P est parallèle aux bases, la section est un cercle de même rayon que le cylindre et dont le centre se trouve sur l'axe du cylindre. • Si P est parallèle à l'axe, la section est un rectangle.

III. Règles d'incidence

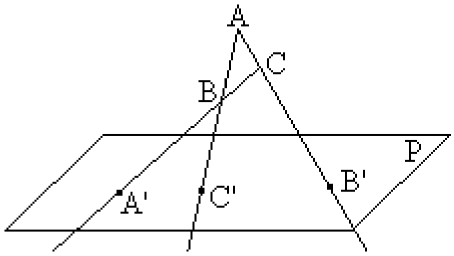
Règle 1 :
Par trois points non alignés A, B et C passe un seul plan. Ce plan est noté (ABC).

Règle 2 :
Si A et B sont deux points d'un plan P, tous les points de la droite (AB) appartiennent au plan P.

Règle 3 :
Si deux plans sont sécants, leur intersection est une droite.

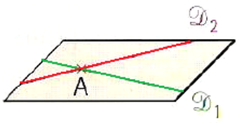
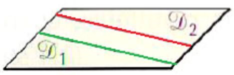
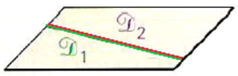
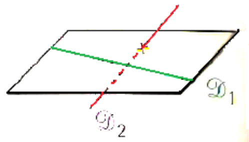
Règle 4 :
Dans un plan donné tous les théorèmes de géométrie plane sont utilisables

Exercice :
P est un plan ; A, B, C sont trois points non alignés qui n'appartiennent pas à P. On suppose que (AB) coupe P en C', que (AC) coupe P en B' et que (BC) coupe P en A'.
Montrer que les points A', B' et C' sont alignés.

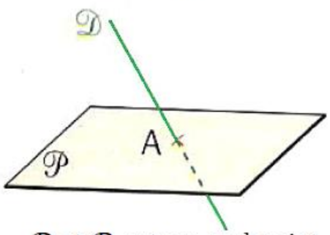
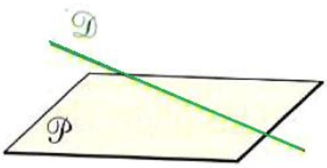


IV. Position relative de droites et de plans

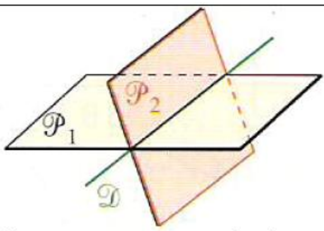
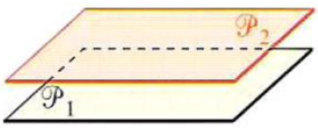
a) deux droites distinctes

Positions relatives de $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$			
Coplanaires			Non coplanaires
sécantes	strictement parallèles	confondues	
			
un point commun unique	pas de point commun	tous les points sont communs	il n'existe pas de plan contenant les deux droites

b) Une droite et un plan

Positions relatives de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{P}$		
sécants	parallèles	
		
$\mathcal{D}$ et $\mathcal{P}$ ont un seul point commun	$\mathcal{D}$ et $\mathcal{P}$ n'ont aucun point commun	$\mathcal{D}$ est incluse dans le plan $\mathcal{P}$.

c) Position relative de deux plans

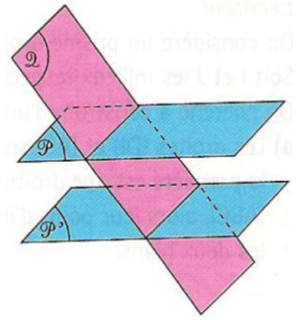
Positions relatives des plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$		
sécants	parallèles	
	confondus	strictement parallèles ou disjoints
		
leur intersection est la droite $\mathcal{D}$	leur intersection est un plan	leur intersection est vide

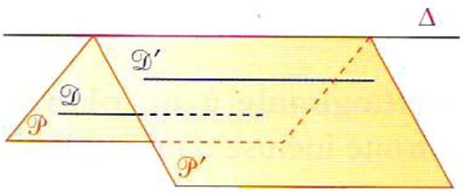
Exercice : déterminer l'intersection de plans sécants :
ABCD est un tétraèdre. I et J sont des points des arêtes [AB] et [CD].Déterminer l'intersection des plans (ABJ) et (CDI).

V. Le parallélisme dans l'espace

a) parallélisme entre droites

Propriété 1 :
Si P et P' sont deux plans parallèles, alors tout plan Q qui coupe P coupe aussi P' et les droites d'intersection sont parallèles.

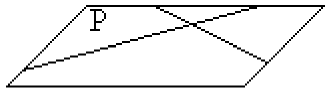




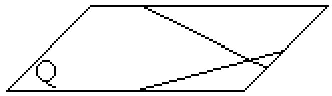
Propriété 2 : (théorème du toit)
D et D' sont deux droites parallèles. P est un plan contenant D, et P' un plan contenant D'. Si, en outre, les plans P et P' sont sécants, alors la droite Δ d'intersection de ces plans est parallèle à D et à D'.

b) parallélisme entre plans

Propriété 3 :
Si deux droites sécantes d'un plan P sont respectivement parallèles à deux droites sécantes d'un plan Q, alors les plans P et Q sont parallèles.



Propriété 4 :
Si deux plans P et P' sont parallèles à un même plan Q alors ces plans sont parallèles deux à deux.

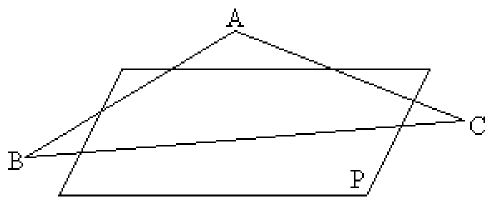


c) parallélisme entre droite et plan

Propriété 5 :
Si une droite d est parallèle à une droite d', alors la droite d est parallèle à tout plan contenant la droite d'.

Propriété 6 :
Si deux plans sont parallèles, alors toute droite de l'un des plans est parallèle à l'autre plan.

Exercice :
Soit un plan P et un triangle ABC tels que (AB) et (AC) soient parallèles à P.
a) Montrer que (BC) est parallèle à P.
b) Montrer que la médiane du triangle ABC, issue de A, est parallèle à P.

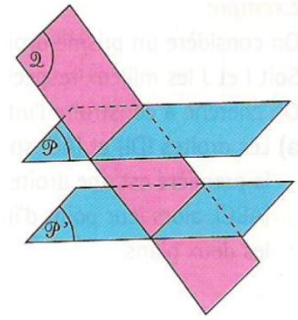


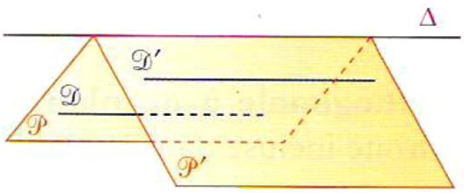
Exercice : déterminer l'intersection de plans sécants :
ABCD est un tétraèdre. I et J sont des points des arêtes [AB] et [CD].Déterminer l'intersection des plans (ABJ) et (CDI).

V. Le parallélisme dans l'espace

d) parallélisme entre droites

Propriété 1 :
Si P et P' sont deux plans parallèles, alors tout plan Q qui coupe P coupe aussi P' et les droites d'intersection sont parallèles.

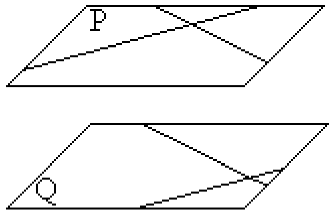




Propriété 2 : (théorème du toit)
D et *D'* sont deux droites parallèles. P est un plan contenant *D*, et P' un plan contenant *D'*. Si, en outre, les plans P et P' sont sécants, alors la droite Δ d'intersection de ces plans est parallèle à *D* et à *D'*.

e) parallélisme entre plans

Propriété 3 :
Si deux droites sécantes d'un plan P sont respectivement parallèles à deux droites sécantes d'un plan Q, alors les plans P et Q sont parallèles.



Propriété 4 :
Si deux plans P et P' sont parallèles à un même plan Q alors ces plans sont parallèles deux à deux.

f) parallélisme entre droite et plan

Propriété 5 :
Si une droite *d* est parallèle à une droite *d'*, alors la droite *d* est parallèle à tout plan contenant la droite *d'*.

Propriété 6 :
Si deux plans sont parallèles, alors toute droite de l'un des plans est parallèle à l'autre plan.

Exercice :
Soit un plan P et un triangle ABC tels que (AB) et (AC) soient parallèles à P.
a) Montrer que (BC) est parallèle à P.
b) Montrer que la médiane du triangle ABC, issue de A, est parallèle à P.