Devoir maison 2nde

Exercice 77P54

1)

a	b	a^2	b^2	a^2+b^2
Pair	Pair	Pair	Pair	Pair
Pair	Impair	Pair	Impair	Impair
Impair	Pair	Impair	Pair	Impair
Impair	Impair	Impair	Impair	Pair

2) Si $N = a^2 + b^2$ est impair alors
   a. ça correspond aux lignes 2 et 3
   et donc ça correspond effectivement quand on considère a et b à un qui est pair et l'autre qui est impair et donc ils n'ont pas la même parité. Dans les autres lignes, a et b sont de même parité et la conclusion, $a^2 + b^2$ est pair est inacceptable vu que $N = a^2 + b^2$ est impair. Donc la seule manière d'avoir N impair est d'avoir a et b de parités différentes.
   b. a étant pair il existe un entier u tel que $a = 2u$ et b étant impair il existe un entier v tel que $b = 2v + 1$.
   Ainsi $N = a^2 + b^2 = (2u)^2 + (2v+1)^2 = 4u^2 + 4v^2 + 4v + 1 =$
   $4(u^2 + v^2 + v) + 1 = 4k + 1$ si on prend $k = u^2 + v^2 + v$ ainsi : $N = 4k + 1$ avec k un entier

3) On a prouvé à la question précédente que si N un nombre impair pouvait être écrit sous la forme de carré de deux entiers alors ceux-ci étaient de parités différentes et que N pouvait être écrit sous la forme $N = 4k + 1$ avec k un entier.
   Maintenant on s'interroge sur la réciproque : est-ce que tout entier N peut s'écrire sous la forme d'une somme de carré de deux entiers.

k	$4k+1$	a^2+b^2
0	1	0^2+1^2
1	5	1^2+2^2
2	9	0^2+3^2
3	13	3^2+2^2
4	17	4^2+1^2
5	21	???

Concentrons-nous sur le cas où $k = 5$, alors $4k + 1 = 21$
Les carrés possibles plus petits que 21 sont 0, 1, 4, 9, 16
Je vais faire un tableau contenant la somme des carrés possibles … c'est un tableau incomplet car le vrai continue indéfiniment dans les deux directions.
$16 + 9 > 21$, $16 + 4 < 21$ donc pas la peine de tester 1 et 0

$a^2 \ \backslash \ b^2$	0	1	4	9	16	25
0	0	1	4	9	16	25
1	1	2	4	10	17	26
4	4	4	8	12	20	29
9	9	10	12	18	25	34
16	16	17	20	25	32	41
25	25	26	29	34	41	50

En blanc j'ai indiqué les sommes trop petites. En rouge j'ai indiqué les sommes trop grandes, si je poursuivais mon tableau je ne ferais qu'ajouter des cases rouges et donc je ne trouverai pas de case contenant 21.
Ce contre-exemple est suffisant pour prouver que Tous les nombres de la forme $4k + 1$ ne sont pas nécessairement décomposable sous la forme d'une somme de deux carrés.