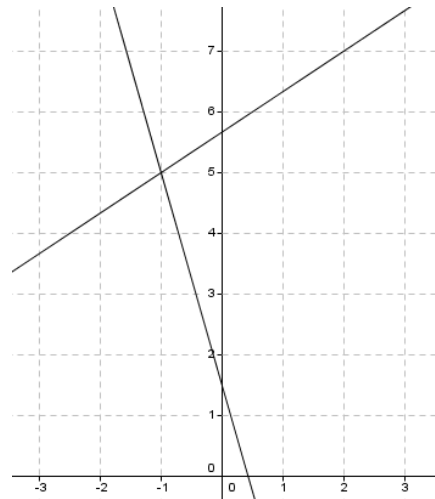


Situation :

On veut trouver les coordonnées du point d'intersection entre les droites :

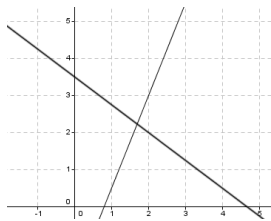
$$\begin{cases} 7x + 2y - 3 = 0 \\ -4x + 6y - 34 = 0 \end{cases} \quad (0)$$

On pourrait tracer les droites et regarder où est ce qu'elles se croisent :



Et là on a de la chance ça tombe juste on voit que le point d'intersection a pour coordonnées $(-1; 5)$ autrement dit le couple solution du système est $(-1; 5)$ autrement dit $x = -1$ et $y = 5$

Maintenant avec le système suivant : $\begin{cases} 5x - 2y - 4 = 0 \\ 3x + 4y - 14 = 0 \end{cases} \quad (1)$



On remarque que c'est « illisible » on ne peut lire avec précision les coordonnées du point d'intersection entre les deux droites, il nous faut donc une méthode rigoureuse pour trouver les valeurs exactes de nos solutions.

On peut utiliser deux méthodes algébriques de résolution de système

Méthode 1 : par combinaison :

$$\begin{cases} 5x - 2y - 4 = 0 \\ 3x + 4y - 14 = 0 \end{cases} \quad \text{mettons les éléments constants à droite}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x - 2y = 4 \\ 3x + 4y = 14 \end{cases} \quad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow 2L_1 \\ \text{préparons la combinaison} \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 10x - 4y = 8 \\ 3x + 4y = 14 \end{cases} \quad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 + L_2 \\ \text{on combine} \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 13x = 22 \\ 3x + 4y = 14 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{22}{13} \\ 3x + 4y = 14 \end{cases} \quad \text{résolution de la première équation}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{22}{13} \\ 3 \frac{22}{13} + 4y = \frac{14}{1} \end{cases} \quad \text{substitution de } x \text{ par sa valeur}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{22}{13} \\ 4y = \frac{14 \times 13}{1 \times 13} - 3 \frac{22}{13} \end{cases} \quad \text{résolution de la seconde équation}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{22}{13} \\ 4y = \frac{182-66}{13} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{22}{13} \\ y = \frac{116}{13} \times \frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{22}{13} \\ y = \frac{116}{52} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{22}{13} \\ y = \frac{29}{13} \end{cases}$$

Application

Résoudre les systèmes suivants en utilisant la méthode par combinaison :

$$\begin{cases} 5x - 2y - 4 = 0 \\ 3x + 4y - 14 = 0 \end{cases} \quad (1) \quad (\text{déjà vu plus haut mais cette fois ci faire disparaître les } x)$$

$$\begin{cases} 3x + 7y = 13 \\ 5x + 2y = -11 \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} 3x + 4y = -2 \\ 5x + 7y = -3 \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} x + 3y - 14 = 0 \\ -2x + y + 7 = 0 \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{cases} 5x + 2y = -1 \\ 7x + 4y = 7 \end{cases} \quad (5)$$

Correction

Système 1

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} 5x - 2y = 4 & L_1 \leftarrow 3L_1 \\ 3x + 4y = 14 & L_2 \leftarrow -5L_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 15x - 6y = 12 \\ -15x - 20y = -70 & L_2 \leftarrow L_1 + L_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 15x - 6y = 12 \\ 0x - 26y = -58 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 15x - 6 \frac{58}{26} = 12 \\ y = \frac{-58}{-26} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 15x = \frac{12 \times 26}{1 \times 26} + 6 \frac{58}{26} \\ y = \frac{58}{26} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{12 \times 26 - 6 \times 58}{1 \times 26} \times \frac{1}{15} \\ y = \frac{58}{26} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-36}{26} \times \frac{1}{15} \\ y = \frac{58}{26} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-6}{65} \\ y = \frac{58}{26} \end{cases}$$

Systeme 2

$$(2) \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 7y = 13 & L_1 \leftarrow 5L_1 \\ 5x + 2y = -11 & L_2 \leftarrow -3L_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 15x + 35y = 65 \\ -15x - 6y = 33 & L_2 \leftarrow L_1 + L_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 15x + 35y = 65 \\ 0x + 29y = 98 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 15x + 35 \frac{98}{29} = 65 \\ y = \frac{98}{29} \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} 15x = \frac{65 \times 29}{1 \times 29} - 35 \frac{98}{29} \\ y = \frac{98}{29} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 15x = \frac{1885 - 3430}{1 \times 29} \\ y = \frac{98}{29} \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-1545}{29} \times \frac{1}{15} \\ y = \frac{98}{29} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-103}{29} \\ y = \frac{98}{29} \end{cases}$$

Systeme 3

$$(3) \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 4y = -2 & L_1 \leftarrow 7L_1 \\ 5x + 7y = -3 & L_2 \leftarrow -4L_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 21x + 28y = -14 \\ -20x - 28y = 12 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 21x + 28y = -14 \\ -20x - 28y = 12 & L_2 \leftarrow L_1 + L_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 21x + 28y = -14 \\ 1x = -2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 21(-2) + 28y = -14 \\ 1x = -2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 28y = 42 - 14 \\ x = -2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{28}{28} \\ x = -2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = -2 \end{cases}$$

Version 2

$$(3) \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 4y = -2 \\ 5x + 7y = -3 \end{cases} \quad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow 5L_1 \\ L_2 \leftarrow -3L_2 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 15x + 20y = -10 \\ -15x - 21y = 9 \end{cases} \quad L_2 \leftarrow L_1 + L_2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 15x + 20y = -10 \\ -1y = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 15x + 20 \times 1 = -10 \\ y = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 15x = -10 - 20 \\ y = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{30}{15} \\ y = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 1 \end{cases}$$

$$(4) \Leftrightarrow \begin{cases} x + 3y - 14 = 0 \\ -2x + y + 7 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 3y = 14 \\ -2x + y = -7 \end{cases} \quad L_1 \leftarrow 2L_1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 6y = 28 \\ -2x + y = -7 \end{cases} \quad L_2 \leftarrow L_1 + L_2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 6y = 28 \\ 7y = 21 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 6y = 28 \\ y = \frac{21}{7} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 6 \times 3 = 28 \\ y = 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 28 - 18 \\ y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 10 \\ y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 3 \end{cases}$$

Système 5

$$(5) \quad \Leftrightarrow \begin{cases} 5x + 2y = -1 & L_1 \leftarrow 7L_1 \\ 7x + 4y = 7 & L_2 \leftarrow -5L_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 35x + 14y = -7 \\ -35x - 20y = -35 \end{cases} \quad L_2 \leftarrow L_1 + L_2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 35x + 14y = -7 \\ -6y = -42 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 35x + 14 \frac{42}{6} = -7 \\ y = \frac{-42}{-6} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 35x + 98 = -7 \\ y = 7 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 35x = -7 - 98 \\ y = 7 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-105}{35} \\ y = 7 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = 7 \end{cases}$$

Méthode par substitution

$$\begin{cases} x + 3y - 14 = 0 \\ -2x + y + 7 = 0 \end{cases} \quad \text{on met les termes constants à droite}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 3y = 14 \\ -2x + y = -7 \end{cases} \quad \text{isolons le } y \text{ de la deuxième ligne}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 3y = 14 \\ y = -7 + 2x \end{cases} \quad \text{remplaçons } y \text{ par l'expression obtenue à la ligne 2 dans la première équation}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 3(-7 + 2x) = 14 \\ y = -7 + 2x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 21 + 6x = 14 \\ y = -7 + 2x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 7x = 14 + 21 \\ y = -7 + 2x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{35}{7} \\ y = -7 + 2x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = -7 + 2 \times 5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 3 \end{cases}$$

Exemple d'applications de la méthode :

$$\text{Résoudre } \begin{cases} 4x - y = 1 \\ 3x + 2y = -13 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x - y = 1 \\ 3x + 2y = -13 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x - 1 = y \\ 3x + 2y = -13 \end{cases} \quad (\text{approche alternative à la fin de la résolution})$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x - 1 = y \\ 3x + 2(4x - 1) = -13 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x - 1 = y \\ 3x + 8x - 2 = -13 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x - 1 = y \\ 11x = -13 + 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x - 1 = y \\ x = -11/11 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4(-1) - 1 = y \\ x = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -5 = y \\ x = -1 \end{cases}$$

Pour la préparation à la substitution on aurait tout aussi bien pu garder le y à gauche, comme suit :

$$\begin{cases} -y = -4x + 1 \\ 3x + 2y = -13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 4x - 1 \\ 3x + 2y = -13 \end{cases}$$

Résoudre $\begin{cases} x + 3y + 3 = 0 \\ -4x + 3y + 33 = 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} x + 3y + 3 = 0 \\ -4x + 3y + 33 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 3y = -3 \\ -4x + 3y = -33 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 - 3y \\ -4x + 3y = -33 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 - 3y \\ -4(-3 - 3y) + 3y = -33 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 - 3y \\ 12 + 12y + 3y = -33 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 - 3y \\ 15y = -33 - 12 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 - 3y \\ y = -45/15 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 - 3(-3) \\ y = -3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = -3 \end{cases}$$

Résolution d'une équation ne se prêtant pas à priori à l'utilisation de la méthode par substitution. (on utilisera quand même la méthode en utilisant la force)

$$\begin{cases} 7x + 12y + 50 = 0 \\ -29x + 13y + 32 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12y = -7x - 50 \\ 13y = 29x - 32 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{7}{12}x - \frac{50}{12} \\ y = \frac{29}{13}x - \frac{32}{13} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{7}{12}x - \frac{50}{12} \\ -\frac{7}{12}x - \frac{50}{12} = \frac{29}{13}x - \frac{32}{13} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{7}{12}x - \frac{50}{12} \\ -7 \times 13x - 50 \times 13 = 29 \times 12x - 32 \times 12 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{7}{12}x - \frac{50}{12} \\ -91x - 650 = 348x - 384 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{7}{12}x - \frac{50}{12} \\ -91x - 348x = -384 + 650 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{7}{12}x - \frac{50}{12} \\ -439x = 266 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{7}{12}x - \frac{50}{12} \\ x = \frac{266}{-439} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{1674}{439} \\ x = \frac{266}{-439} \end{cases}$$