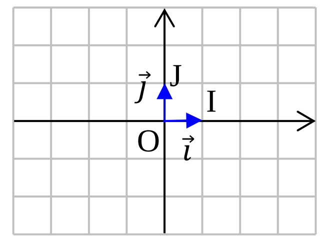
VECTEURS ET REPÉRAGE

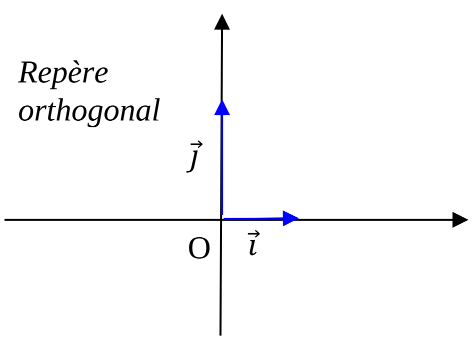
I. Repère du plan

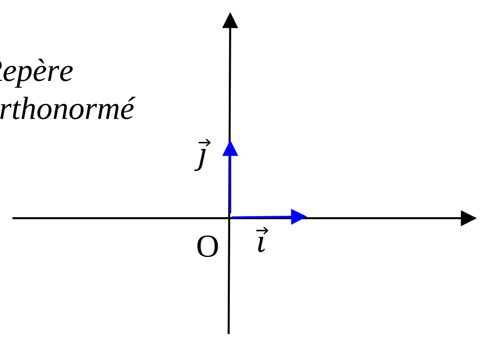


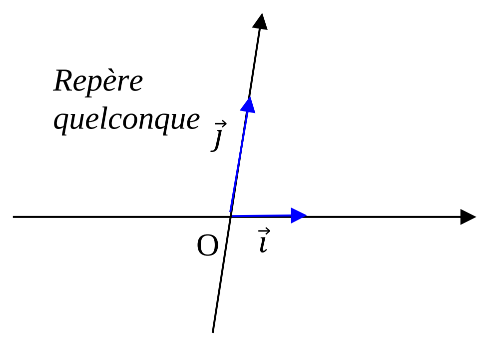
Trois points distincts deux à deux O, I et J du plan forment un repère, que l'on peut noter (O, I, J).
L'origine O et les unités OI et OJ permettent de graduer les axes (OI) et (OJ).

Si on pose $\vec{\imath} = \overrightarrow{OI}$ et $\vec{j} = \overrightarrow{OJ}$, alors ce repère se note également (O, $\vec{\imath}$, $\vec{j}$).

<u>Définitions :</u>
- On appelle **repère du plan** tout triplet (O, $\vec{\imath}$, $\vec{j}$) où O est un point et $\vec{\imath}$ et $\vec{j}$ sont deux vecteurs non colinéaires.
- Un repère est dit **orthogonal** si $\vec{\imath}$ et $\vec{j}$ ont des directions perpendiculaires.
- Un repère est dit **orthonormé** s'il est orthogonal et si $\vec{\imath}$ et $\vec{j}$ sont de norme 1.



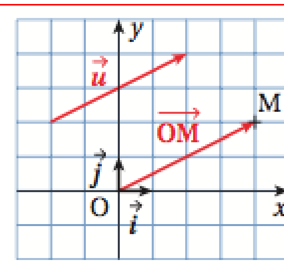




TP info : Lectures de coordonnées :
http://www.maths-et-tiques.fr/telech/Lecture_coord.pdf

II. Coordonnées d'un vecteur

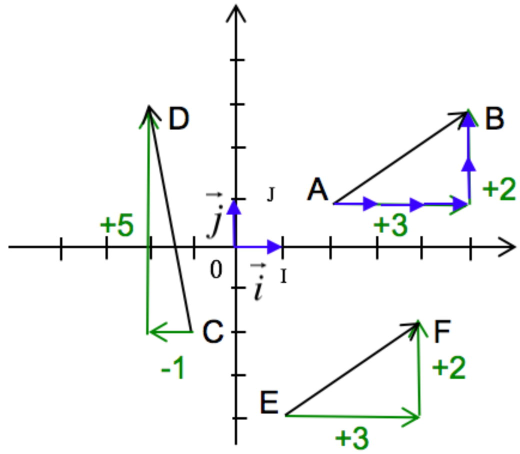
<u>Définition :</u> Soit M un point quelconque d'un repère (O, $\vec{\imath}$, $\vec{j}$) et un vecteur $\vec{u}$ tel que : $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$.
Les **coordonnées du vecteur** $\vec{u}$ sont les coordonnées du point M.



On note : $\vec{u}\,(x, y)$ ou $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Méthode : Déterminer les coordonnées d'un vecteur par lecture graphique

Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{EF}$ par lecture graphique :



Pour aller de A vers B, on effectue une translation de 3 carreaux vers la droite (+3) et une translation de 2 carreaux vers le haut (+2). On trace ainsi un « *chemin* » de vecteurs $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ mis bout à bout reliant l'origine et l'extrémité du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

Ainsi $\overrightarrow{AB} = 3\vec{\imath} + 2\vec{\jmath}$.

Les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ sont donc $\binom{3}{2}$.

De même, $\overrightarrow{CD} = \binom{-1}{5}$ et $\overrightarrow{EF} = \binom{3}{2}$.

Propriété :

Soit A et B deux points de coordonnées $\binom{x_A}{y_A}$ et $\binom{x_B}{y_B}$ dans un repère (O, $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$).

Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $\binom{x_B - x_A}{y_B - y_A}$.

Démonstration :

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = -\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$

Comme $-\overrightarrow{OA}$ *et* $\overrightarrow{OB}$ ont pour coordonnées respectives $\binom{-x_A}{-y_A}$ (voir propriété qui suit) et $\binom{x_B}{y_B}$ alors $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $\binom{x_B - x_A}{y_B - y_A}$.

Méthode : Déterminer les coordonnées d'un vecteur par calcul

Retrouver les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{EF}$ par calcul avec :

A$\binom{2}{1}$, B$\binom{5}{3}$, C$\binom{-1}{-2}$, D$\binom{-2}{3}$, E$\binom{1}{-4}$ et F$\binom{4}{-2}$.

$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 5-2 \\ 3-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} -2-(-1) \\ 3-(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$,
$\overrightarrow{EF} = \begin{pmatrix} 4-1 \\ -2-(-4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

Propriétés :

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ dans un repère (O, $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$) et un réel *k*.

- $\vec{u} = \vec{v}$ équivaut à $x = x'$ et $y = y'$
- Le vecteur $\vec{u} + \vec{v}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x+x' \\ y+y' \end{pmatrix}$
- Le vecteur $k\vec{u}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}$

Remarque :

Si $\vec{u}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ alors $-\vec{u}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix}$.

Méthode : Appliquer les formules sur les coordonnées de vecteurs

En prenant les données de la méthode précédente, calculer les coordonnées des vecteurs $3\overrightarrow{AB}$, $4\overrightarrow{CD}$ et $3\overrightarrow{AB} - 4\overrightarrow{CD}$.

On a : $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{EF} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

$3\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3\times 3 \\ 3\times 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \end{pmatrix}$, $4\overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} 4\times(-1) \\ 4\times 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 20 \end{pmatrix}$

$3\overrightarrow{AB} - 4\overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} 9-(-4) \\ 6-20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ -14 \end{pmatrix}$

Méthode : Calculer les coordonnées d'un point défini par une égalité vectorielle

Dans un repère, soit les points A$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, B$\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$, C$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Déterminer les coordonnées du point D tel que ABCD soit un parallélogramme.

ABCD est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

On a : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -4-1 \\ 3-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix} 1-x_D \\ -2-y_D \end{pmatrix}$

Donc $1 - x_D = -5$ et $-2 - y_D = 1$

Soit $x_D = 6$ et $y_D = -3$.

III. Colinéarité de deux vecteurs

1) Critère de colinéarité

Propriété :

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de coordonnées $\binom{x}{y}$ et $\binom{x'}{y'}$ dans un repère (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$).

Dire que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires revient à dire que les coordonnées des deux vecteurs sont proportionnelles soit : $xy' - yx' = 0$.

Démonstration au programme :

- Si l'un des vecteurs est nul alors l'équivalence est évidente.
- Supposons maintenant que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient non nuls.

Dire que les vecteurs $\vec{u}\binom{x}{y}$ et $\vec{v}\binom{x'}{y'}$ sont colinéaires équivaut à dire qu'il existe un nombre réel *k* tel que $\vec{u} = k\vec{v}$.

Les coordonnées des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont donc proportionnelles et le tableau ci-dessous est un tableau de proportionnalité :

x	x'
y	y'

Donc : $xy' = yx'$ soit encore $xy' - yx' = 0$.

Réciproquement, si $xy' - yx' = 0$.

Le vecteur $\vec{v}$ étant non nul, l'une de ses coordonnées est non nulle. Supposons que $x' \neq 0$. Posons alors $k = \frac{x}{x'}$. L'égalité $xy' - yx' = 0$ s'écrit : $yx' = xy'$.

Soit : $y = \frac{xy'}{x'} = ky'$.

Comme on a déjà $x = kx'$, on en déduit que $\vec{u} = k\vec{v}$.

Méthode : Vérifier si deux vecteurs sont colinéaires

Dans chaque cas, vérifier si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

a) $\vec{u}\binom{4}{-7}$ et $\vec{v}\binom{-12}{21}$ b) $\vec{u}\binom{5}{-2}$ et $\vec{v}\binom{15}{-7}$

a) 4 x 21 – (–7) x (–12) = 84 – 84 = 0. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont donc colinéaires.
On peut également observer directement que $\vec{v} = -3\vec{u}$.

b) 5 x (–7) – (–2) x (15) = –35 + 30 = –5 ≠ 0.
Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont donc pas colinéaires.

2) Déterminant de deux vecteurs

Définition :

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de coordonnées $\binom{x}{y}$ et $\binom{x'}{y'}$ dans un repère (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$).

Le nombre $xy' - yx'$ est appelé déterminant des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

On note : $det(\vec{u}\,;\,\vec{v}) = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - yx'$.

Propriété :
Dire que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires revient à dire que $det(\vec{u}\,;\,\vec{v}) = 0$.

Méthode : Vérifier si deux vecteurs sont colinéaires à l'aide du déterminant
Dans chaque cas, vérifier si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.
a) $\vec{u}\begin{pmatrix}-6\\10\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}9\\-15\end{pmatrix}$ b) $\vec{u}\begin{pmatrix}4\\9\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}11\\23\end{pmatrix}$

a) $det(\vec{u}\,;\,\vec{v}) = \begin{vmatrix}-6 & 9\\10 & -15\end{vmatrix} = (-6)\times(-15) - 10\times 9 = 90 - 90 = 0$
Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont donc colinéaires.
b) $det(\vec{u}\,;\,\vec{v}) = \begin{vmatrix}4 & 11\\9 & 23\end{vmatrix} = 4\times 23 - 9\times 11 = 92 - 99 = -7 \neq 0$
Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont donc pas colinéaires.

3) Applications

Méthode : Appliquer la colinéarité
On considère (O, $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$) un repère du plan.
Soit A$\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$, B$\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$, C$\begin{pmatrix}-2\\-3\end{pmatrix}$, D$\begin{pmatrix}6\\-1\end{pmatrix}$ et E$\begin{pmatrix}5\\0\end{pmatrix}$.
1) Démontrer que les droites (AB) et (CD) sont parallèles.
2) Démontrer que les points E, B et D sont alignés.

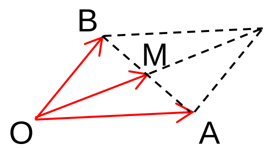
1) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}3-(-1)\\2-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix}6-(-2)\\-1-(-3)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}8\\2\end{pmatrix}$.
Comme les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont proportionnelles, on en déduit que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.
Les droites (AB) et (CD) sont donc parallèles.

2) $\overrightarrow{EB} = \begin{pmatrix}3-5\\2-0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{ED} = \begin{pmatrix}6-5\\-1-0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$.
$det(\overrightarrow{EB}\,;\,\overrightarrow{ED}) = \begin{vmatrix}-2 & 1\\2 & -1\end{vmatrix} = -2\times(-1) - 2\times 1 = 0$
Les coordonnées de $\overrightarrow{EB}$ et $\overrightarrow{ED}$ vérifient le critère de colinéarité des vecteurs.
On en déduit que les vecteurs $\overrightarrow{EB}$ et $\overrightarrow{ED}$ sont colinéaires.
Les points E, B et D sont donc alignés.

IV. Coordonnées du milieu d'un segment

Propriété :
Soit A et B deux points de coordonnées $\begin{pmatrix}x_A\\y_A\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}x_B\\y_B\end{pmatrix}$ dans un repère (O, $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$).
Le milieu M du segment [AB] a pour coordonnées : $\begin{pmatrix}\frac{1}{2}(x_A + x_B)\\\frac{1}{2}(y_A + y_B)\end{pmatrix}$

Démonstration :



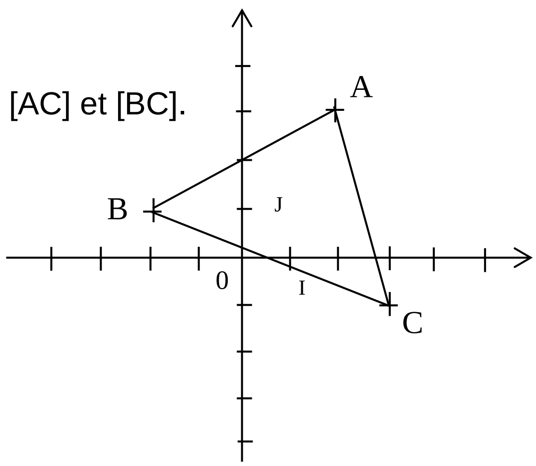
Considérons le parallélogramme construit à partir de O, A et B.
Soit M son centre.

Alors $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$.

$\overrightarrow{OM}$ (ou M) a donc les mêmes coordonnées que celles du vecteur $\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$ soit : $\begin{pmatrix} \frac{1}{2}(x_A + x_B) \\ \frac{1}{2}(y_A + y_B) \end{pmatrix}$

Méthode : Calculer les coordonnées d'un milieu

On considère (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$) un repère du plan.
Soit A$\binom{2}{3}$, B$\binom{-2}{1}$ et C$\binom{3}{-1}$.
Calculer les coordonnées de M, N et P milieux respectifs de [AB], [AC] et [BC].



M ($\frac{2+(-2)}{2}$; $\frac{3+1}{2}$) = (0 ; 2)   N ($\frac{2+3}{2}$; $\frac{3+(-1)}{2}$) = (2,5 ; 1)
P ($\frac{-2+3}{2}$; $\frac{1+(-1)}{2}$) = (0,5 ; 0)

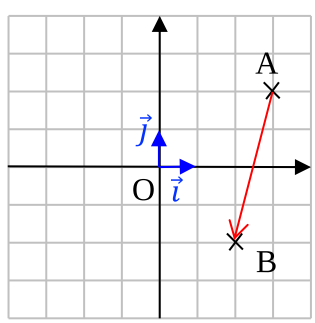
V. Distance dans un repère orthonormé

Propriété :
Soit A et B deux points de coordonnées $\binom{x_A}{y_A}$ et $\binom{x_B}{y_B}$ dans un repère ***orthonormé*** (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$), alors : AB = $\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

(Cette propriété est une conséquence du théorème de Pythagore)

Méthode : Calculer une distance dans un repère orthonormé

Soit A$\binom{3}{2}$ et B$\binom{2}{-2}$ deux points dans un repère orthonormé (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$).



La distance AB (ou norme du vecteur $\overrightarrow{AB}$) est égale à :
AB = $\sqrt{(2-3)^2 + (-2-2)^2}$
= $\sqrt{1+16}$
= $\sqrt{17}$