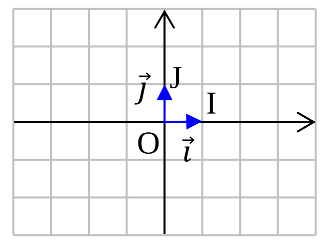
VECTEURS ET REPÉRAGE

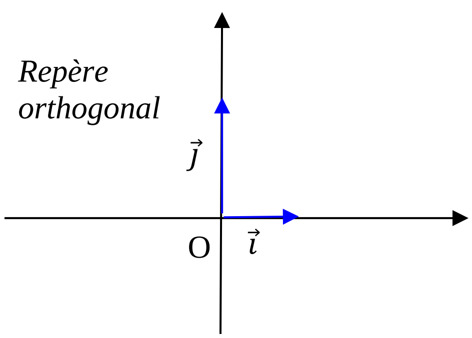
I. Repère du plan

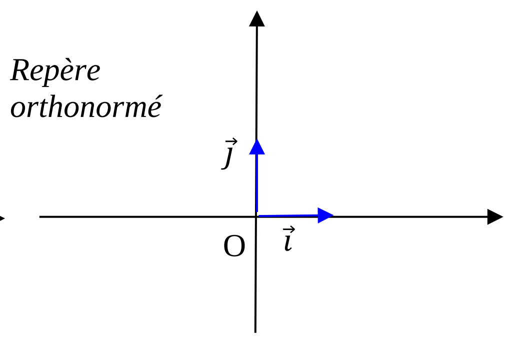
Trois points distincts deux à deux O, I et J du plan forment un repère, que l'on peut noter (O, I, J).
L'origine O et les unités OI et OJ permettent de graduer les axes (OI) et (OJ).

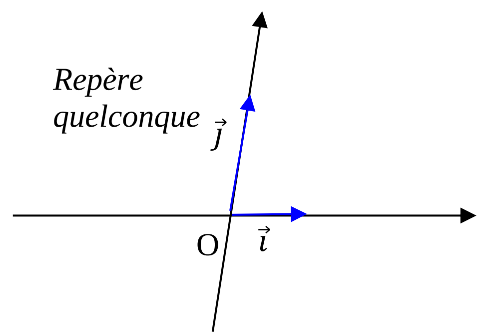


Si on pose $\vec{i} = \overrightarrow{OI}$ et $\vec{j} = \overrightarrow{OJ}$, alors ce repère se note également (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$).

<u>Définitions :</u>
- On appelle **repère du plan** tout triplet (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$) où O est un point et $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont deux vecteurs non colinéaires.
- Un repère est dit **orthogonal** si $\vec{i}$ et $\vec{j}$ ont des directions perpendiculaires.
- Un repère est dit **orthonormé** s'il est orthogonal et si $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont de norme 1.

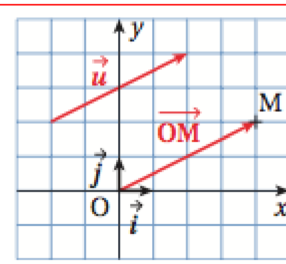






II. Coordonnées d'un vecteur

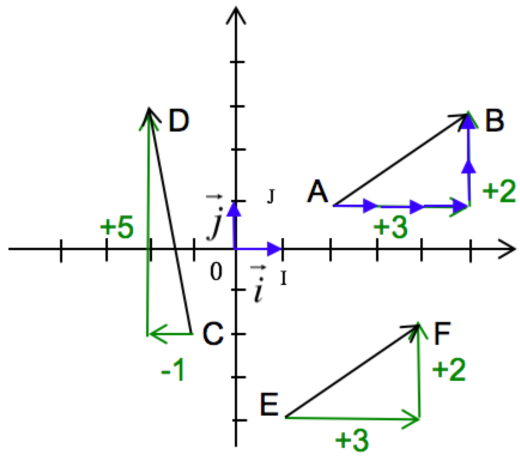
<u>Définition :</u> Soit M un point quelconque d'un repère (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$) et un vecteur $\vec{u}$ tel que : $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$.
Les **coordonnées du vecteur** $\vec{u}$ sont les coordonnées du point M.



On note : $\vec{u}$ (x, y) ou $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

<u>Méthode :</u> Déterminer les coordonnées d'un vecteur par lecture graphique

Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{EF}$ par lecture graphique :



Pour aller de A vers B, on effectue une translation de 3 carreaux vers la droite (+3) et une translation de 2 carreaux vers le haut (+2). On trace ainsi un « *chemin* » de vecteurs $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ mis bout à bout reliant l'origine et l'extrémité du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

Ainsi $\overrightarrow{AB} = 3\vec{\imath} + 2\vec{\jmath}$.

Les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ sont donc $\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$.

De même, $\overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{EF} = \begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}$.

Propriété :

Soit A et B deux points de coordonnées $\begin{pmatrix}x_A\\y_A\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}x_B\\y_B\end{pmatrix}$ dans un repère (O, $\vec{\imath}, \vec{\jmath}$).

Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}x_B - x_A\\y_B - y_A\end{pmatrix}$.

Démonstration :

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = -\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$

Comme $-\overrightarrow{OA}$ *et* $\overrightarrow{OB}$ ont pour coordonnées respectives $\begin{pmatrix}-x_A\\-y_A\end{pmatrix}$ (voir propriété qui suit) et $\begin{pmatrix}x_B\\y_B\end{pmatrix}$ alors $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}x_B - x_A\\y_B - y_A\end{pmatrix}$.

Méthode : Déterminer les coordonnées d'un vecteur par calcul

Retrouver les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{EF}$ par calcul avec :

A$\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$, B$\begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}$, C$\begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix}$, D$\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$, E$\begin{pmatrix}1\\-4\end{pmatrix}$ et F$\begin{pmatrix}4\\-2\end{pmatrix}$.

Propriétés :

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ dans un repère

(O, $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$) et un réel *k*.

- $\vec{u} = \vec{v}$ équivaut à $x = x'$ et $y = y'$
- Le vecteur $\vec{u} + \vec{v}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \end{pmatrix}$
- Le vecteur $k\vec{u}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}$

Remarque :

Si $\vec{u}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ alors $-\vec{u}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix}$.

Méthode : Appliquer les formules sur les coordonnées de vecteurs

En prenant les données de la méthode précédente, calculer les coordonnées des vecteurs $3\overrightarrow{AB}$, $4\overrightarrow{CD}$ et $3\overrightarrow{AB} - 4\overrightarrow{CD}$.

Méthode : Calculer les coordonnées d'un point défini par une égalité vectorielle

Dans un repère, soit les points A$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, B$\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$, C$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Déterminer les coordonnées du point D tel que ABCD soit un parallélogramme.

III. Colinéarité de deux vecteurs

1) Critère de colinéarité

Propriété :

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ dans un repère (O, $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$).

Dire que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires revient à dire que les coordonnées des deux vecteurs sont proportionnelles soit : $xy' - yx' = 0$.

Démonstration au programme :
- Si l'un des vecteurs est nul alors l'équivalence est évidente.
- Supposons maintenant que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient non nuls.

Méthode : Vérifier si deux vecteurs sont colinéaires

Dans chaque cas, vérifier si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

a) $\vec{u}\begin{pmatrix}4\\-7\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-12\\21\end{pmatrix}$ b) $\vec{u}\begin{pmatrix}5\\-2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}15\\-7\end{pmatrix}$

2) Déterminant de deux vecteurs

Définition :

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de coordonnées $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Le nombre $xy' - yx'$ est appelé déterminant des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

On note : $det(\vec{u}\,;\,\vec{v}) = \begin{vmatrix}x & x'\\y & y'\end{vmatrix} = xy' - yx'$.

Propriété :
Dire que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires revient à dire que $det(\vec{u}\,;\,\vec{v}) = 0$.

Méthode : Vérifier si deux vecteurs sont colinéaires à l'aide du déterminant
Dans chaque cas, vérifier si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.
a) $\vec{u}\begin{pmatrix}-6\\10\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}9\\-15\end{pmatrix}$ b) $\vec{u}\begin{pmatrix}4\\9\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}11\\23\end{pmatrix}$

3) Applications

Méthode : Appliquer la colinéarité

On considère (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$) un repère du plan.

Soit A$\binom{-1}{1}$, B$\binom{3}{2}$, C$\binom{-2}{-3}$, D$\binom{6}{-1}$ et E$\binom{5}{0}$.

1) Démontrer que les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

2) Démontrer que les points E, B et D sont alignés.

IV. Coordonnées du milieu d'un segment

Propriété :

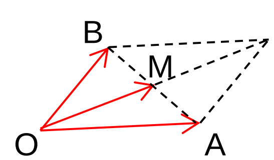
Soit A et B deux points de coordonnées $\binom{x_A}{y_A}$ et $\binom{x_B}{y_B}$ dans un repère (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$).

Le milieu M du segment [AB] a pour coordonnées : $\begin{pmatrix} \frac{1}{2}(x_A + x_B) \\ \frac{1}{2}(y_A + y_B) \end{pmatrix}$

Démonstration :

Considérons le parallélogramme construit à partir de O, A et B.

Soit M son centre.

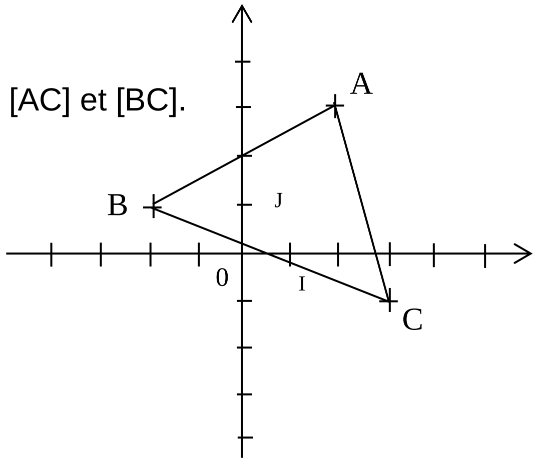


Alors $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$.

$\overrightarrow{OM}$ (ou M) a donc les mêmes coordonnées que celles du vecteur $\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$ soit : $\begin{pmatrix} \frac{1}{2}(x_A + x_B) \\ \frac{1}{2}(y_A + y_B) \end{pmatrix}$

Méthode : Calculer les coordonnées d'un milieu

On considère (O, $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$) un repère du plan.
Soit A$\binom{2}{3}$, B$\binom{-2}{1}$ et C$\binom{3}{-1}$.
Calculer les coordonnées de M, N et P milieux respectifs de [AB], [AC] et [BC].



V. Distance dans un repère orthonormé

Propriété :
Soit A et B deux points de coordonnées $\binom{x_A}{y_A}$ et $\binom{x_B}{y_B}$ dans un repère ***orthonormé*** (O, $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$), alors : AB = $\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

(Cette propriété est une conséquence du théorème de Pythagore)

Méthode : Calculer une distance dans un repère orthonormé

Soit A$\binom{3}{2}$ et B$\binom{2}{-2}$ deux points dans un repère orthonormé (O, $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$).
Déterminer AB