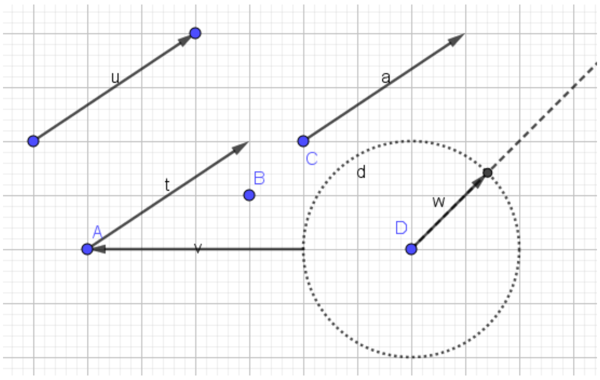
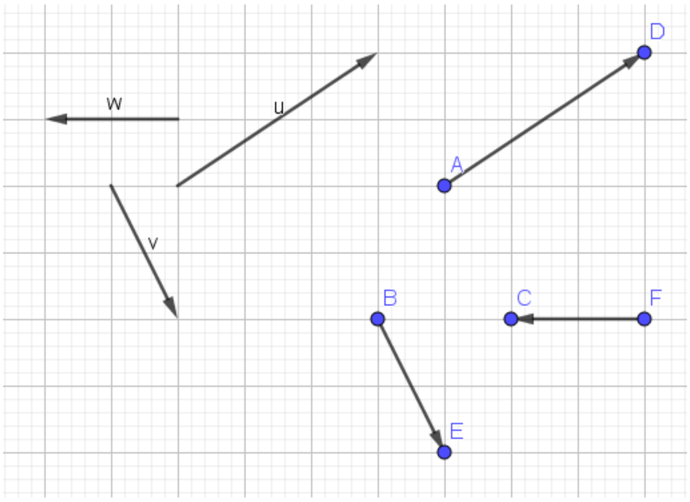
Correction des exercices sur les vecteurs

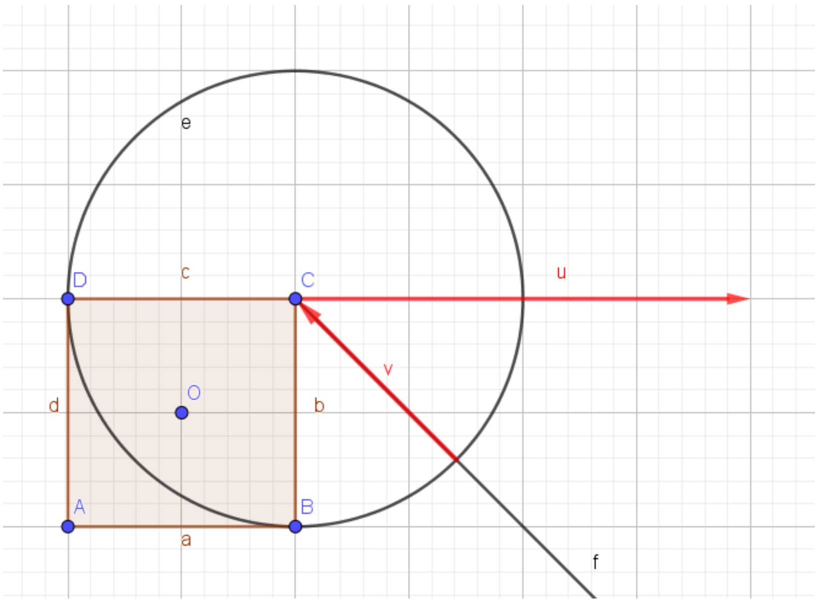
Exercice 1P131



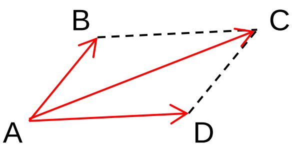
Exercice 2P131



Exercice 3P131



Exercice 1



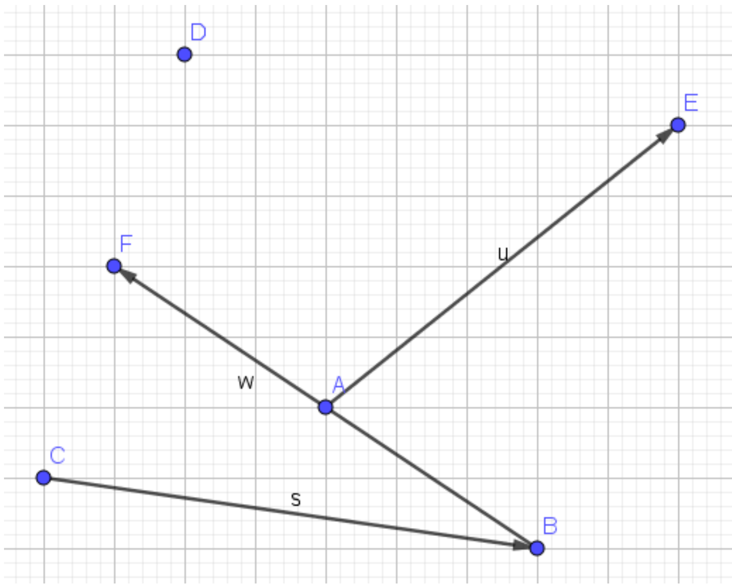
Comme ABCD est un parallélogramme on aura : $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{DA}$ et $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB} = -\vec{u}$ $\quad$ $\overrightarrow{DA} = -\overrightarrow{AD} = -\vec{v}$ $\quad$ $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{DA} = -\vec{v}$

$\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB} = \vec{u}$ $\quad$ $\overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{DC} = -\vec{u}$ $\quad$ $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = \vec{u} + \overrightarrow{AB} = \vec{u} + \vec{v}$

$\overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{AC} = -(\vec{u} + \vec{v}) = -\vec{u} - \vec{v}$

Exercice 2



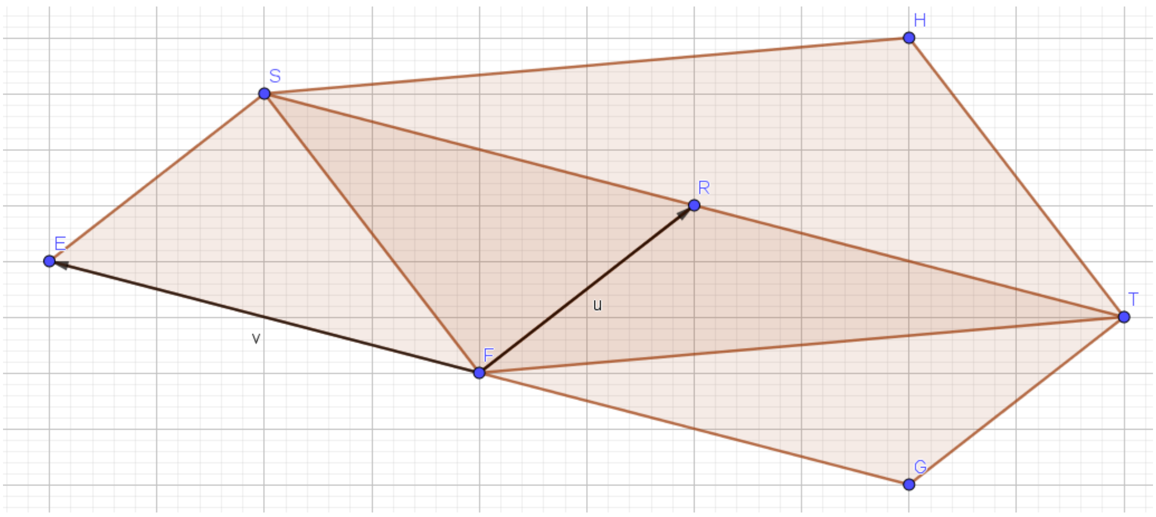
a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AE}$ il suffit de dessiner une flèche allant de A à E.

b) $\vec{s} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}$
$= \overrightarrow{CB}$
$\vec{v} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA}$
$= \overrightarrow{AA} = \vec{0}$
$\vec{w} = \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{AB}$
$= \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{BA}$
$= \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BA} = 2\overrightarrow{BA}$
j'ai créé un point F pour faciliter ma représentation, ainsi à partir de A, j'ai fait deux fois le déplacement selon le vecteur $\overrightarrow{BA}$ ce qui m'a amené au point F
$\vec{t} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{DB}$
$= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CC} = \vec{0}$

Exercice 3

$$\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{EB} = \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CE} = \overrightarrow{EE} = \vec{0}$$

Exercice 4



1) $\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{FR} + \overrightarrow{FE} = \overrightarrow{FR} + \overrightarrow{RS}$ (car EFRS est un parallélogramme) ainsi $\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{FS}$ d'après la relation de Chasles.
$\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v}) = \overrightarrow{FR} + \overrightarrow{FG} = \overrightarrow{FR} + \overrightarrow{RT}$ (car FGTR est un parallélogramme) ainsi $\vec{u} - \vec{v} = \overrightarrow{FT}$ d'après la relation de Chasles.

$\vec{u}+\vec{v}+(\vec{u}-\vec{v})=\overrightarrow{FS}+\overrightarrow{FT}=\overrightarrow{FH}$ car FSHT est un parallélogramme (si ça n'est pas évident on peut détailler la décomposition comme lors des deux questions précédentes.

2) Le point R est au milieu des diagonales de FSHT, comme F,R et T ne sont pas alignés on aura : FR+RT>FT (si on avait des vecteurs à la place des longueur on aurait une égalité d'après la relation de Chasles)

Exercice 5

a) $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{AB}$

b) $\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}$

c) $\overrightarrow{NM}=\overrightarrow{NA}+\overrightarrow{AM}=-\overrightarrow{AN}+\overrightarrow{AM}=-\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}\right)+2\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}+2\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{AB}$

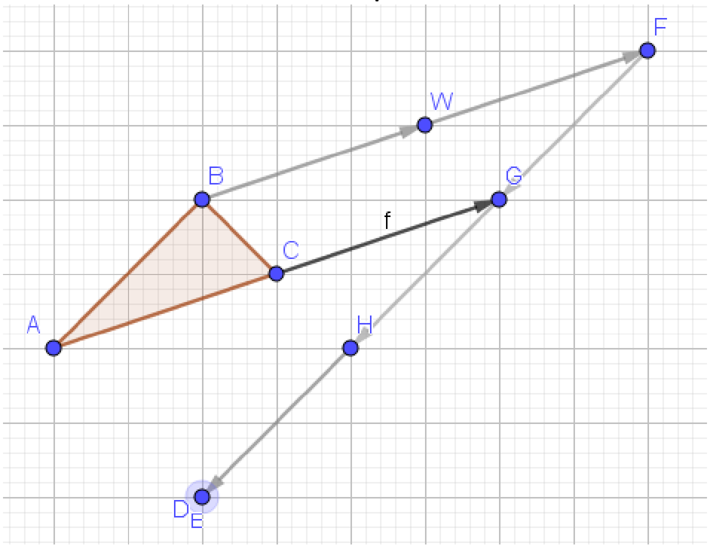
On est loin du résultat attendu, on va devoir y aller en force on veut faire apparaitre les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{DB}$, je vais sortir ces vecteurs de $\overrightarrow{DC}$ et on va voir ce qui va se passer : $\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{AC}$ ce qui est ce qu'il fallait démontrer

Exercice 6

$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{EF}$ sont de même direction	$\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{EF}$	$\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{EF}$	$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{EF}$ sont colinéaires
$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{GH}$ sont de même direction	$\overrightarrow{AB}=\frac{4}{3}\overrightarrow{GH}$	$\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{GH}$	$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{GH}$ sont colinéaires
$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{IJ}$ sont de même direction	$\overrightarrow{AB}=-4\overrightarrow{IJ}$	$-\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{IJ}$	$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{IJ}$ sont colinéaires
$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{KL}$ ne sont pas de même direction			$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{KL}$ ne sont pas colinéaires
$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BM}$ sont de même direction	$\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{BM}$	$\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BM}$	$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BM}$ sont colinéaires

Exercice 7

On peut remarquer que les vecteurs et sont exprimés en fonction de $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AB}$.



On remarque que les points D et E sont confondus

Pour le prouver on peut essayer de montrer que le vecteur $\overrightarrow{ED}$ est nul.

$\overrightarrow{ED} = \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BD}$ les seuls vecteurs que je connais qui contiennent les lettres E et D sont donc j'essaye de les faire apparaitre.

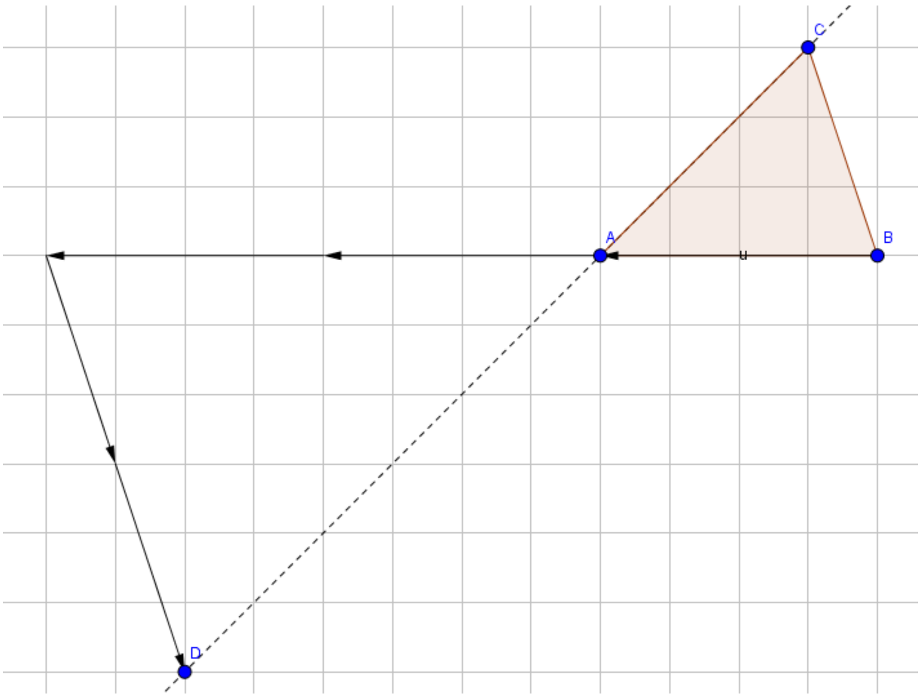
$\overrightarrow{ED} = -\overrightarrow{CE} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BD}$

$= -\left(\overrightarrow{AC} - 2\overrightarrow{AB}\right) + \overrightarrow{CB} + \left(2\overrightarrow{AC} - 3\overrightarrow{AB}\right)$

$= -\overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB} + 2\overrightarrow{AC} - 3\overrightarrow{AB}$

$= \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$

Exercice 8



$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}$

$= \overrightarrow{AB} + \left(3\overrightarrow{BA} - 2\overrightarrow{BC}\right)$

$= \overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{BA} - 2\overrightarrow{BC}$

$= \overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{BC}$

$= -2\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{BC}$

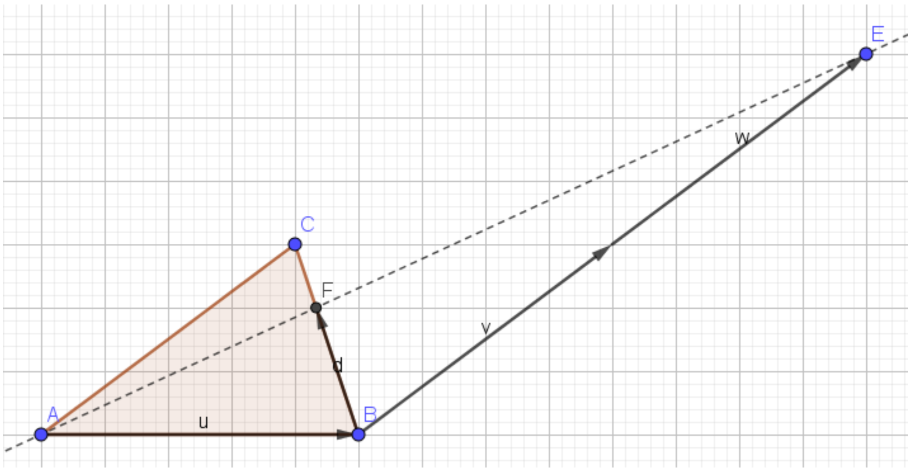
$= -2\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right)$

$= -2\overrightarrow{AC}$

Ainsi $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont de même direction et donc (AC) et (AD) sont paralléles. De plus ces droites ont le point A en commun et donc elles sont confondues, on peut donc dire que A, B et D sont alignés.

Exercice 9

1)



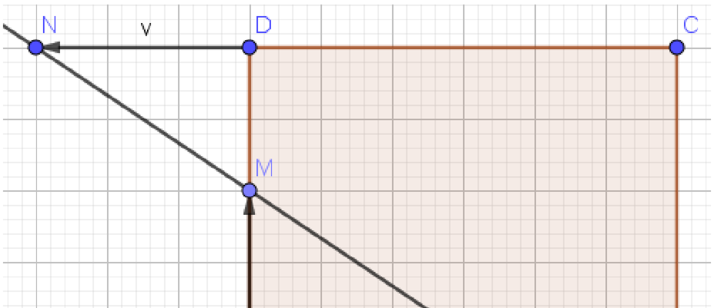
2) $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right) = \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$

$= \overrightarrow{AB} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$

3) $\overrightarrow{AF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}\right) = \frac{1}{3}\overrightarrow{AE}$

$\overrightarrow{AF}$ et $\overrightarrow{AE}$ sont donc colinéaires (c'est-à-dire que ces vecteurs sont de même direction)
Ainsi (AF)//(AE) or ces deux droites passent par A donc elles sont confondues.
Ainsi A, F et E sont alignés.

Exercice 10



$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DN}$

$= -\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DN} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{DA} + \left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{DC}\right) = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{DA} - \frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$

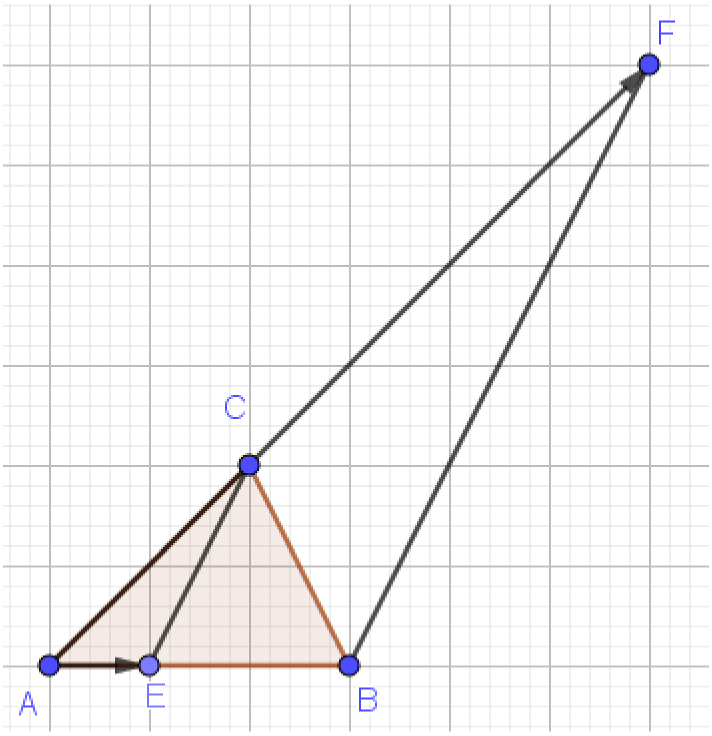
$= \frac{2}{3}\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DA} - \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{DA} - \frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$

$\overrightarrow{NB} = \overrightarrow{ND} + \overrightarrow{DB} = -\overrightarrow{DN} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} = -\left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{DC}\right) + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC}$

$= \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DA} + \frac{3}{2}\overrightarrow{DC} = -3\left(-\frac{1}{3}\overrightarrow{DA} - \frac{1}{2}\overrightarrow{DC}\right) = -3\overrightarrow{MN}$

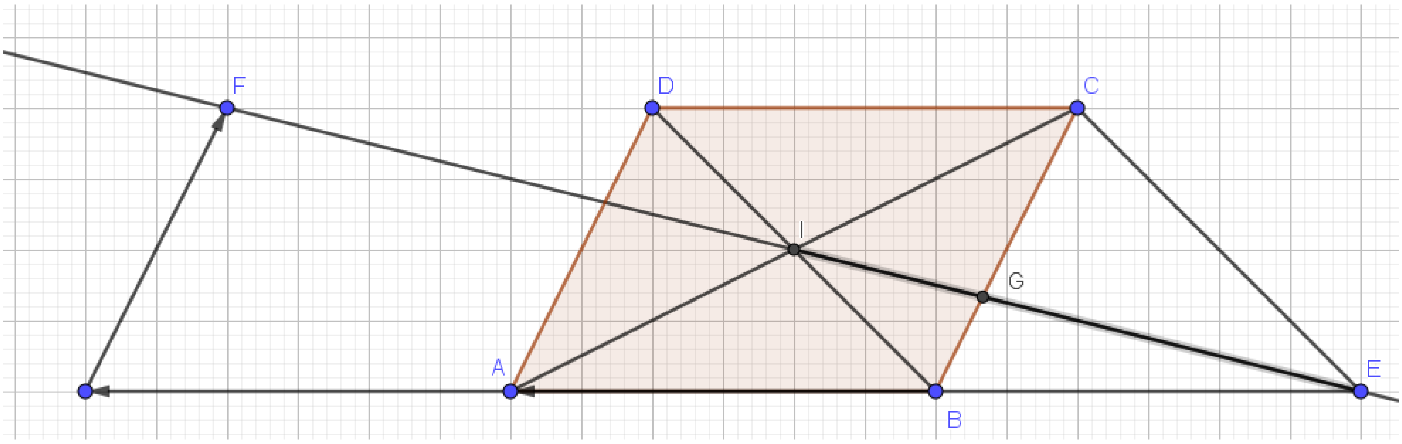
Ainsi $\overrightarrow{NB}$ et $\overrightarrow{MN}$ sont colinéaires et donc les droites (NB) et (MN) sont parallèles, or elles partagent le point N et donc elles sont confondues. Les points N, M et B sont alignés.

Exercice 11



$\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{BA} + 3\,\overrightarrow{AC}$
$= -\,\overrightarrow{AB} + 3\,\overrightarrow{AC}$
$\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AC} = -\,\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AC}$
$= -\frac{1}{3}\,\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \frac{1}{3}\,\left(-\overrightarrow{AB} + 3\,\overrightarrow{AC}\right)$
$= \frac{1}{3}\,\overrightarrow{BF}$
Les vecteurs $\overrightarrow{EC}$ et $\overrightarrow{BF}$ sont donc colinéaires et donc (EC) // (BF)

Exercice 12



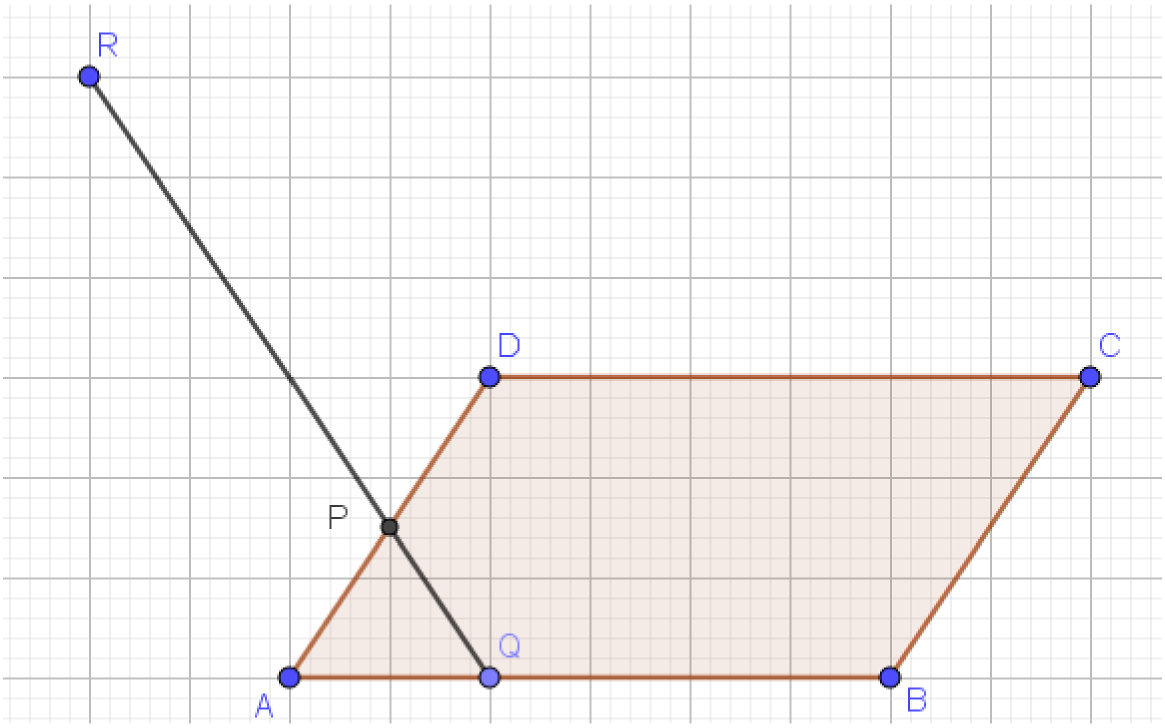
$\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{AB}$ car B est le milieu de $[AE]$
$= 2\overrightarrow{DC}$ car ABCD est un parallélogramme
$= -2\overrightarrow{CD}$

On sait que le centre de gravité est placé à deux tiers de chaque médiane en partant du sommet duquel elle est issue donc $\overrightarrow{CG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CB}$
De la même manière $\overrightarrow{EG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{EI}$ et donc $\frac{3}{2}\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{EI}$
$\overrightarrow{IE} + \overrightarrow{IF} = (\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AE}) + (\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BF}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AE} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BF}$
$= \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{DC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DB} + \left(2\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}\right)$

$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CB}) + 2\overrightarrow{DC} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DA}) + (2\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD})$
$= \frac{1}{2}(-\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}) + 2\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}) + (-2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})$
$= -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + 2\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} - 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$
$= \left(-\frac{1}{2} + 2 + \frac{1}{2} - 2\right)\overrightarrow{AB} + \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 1\right)\overrightarrow{AD} = \vec{0}$

$\overrightarrow{IE} = -\overrightarrow{IF}$
Donc I, E et F sont alignés
Or $G \in (IE)$ donc I, E, G et F sont alignés.

Exercice 13



1) $\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BR} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BD} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} + 2(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD})$
$= -\frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} + 2(-\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AD}$

$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{PR}$
Ainsi $\overrightarrow{PQ}$ et $\overrightarrow{PR}$ sont colinéaires et donc (PQ) et (PR) sont parallèles et comme elles partagent le point P, elles sont confondues, ainsi P, Q et R sont alignés.
2) version débutant :
Dans le repère $(O; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD})$ on a :
$\overrightarrow{AA} = \vec{0} = 0\overrightarrow{AB} + 0\overrightarrow{AD}$ donc $A(0; 0)$
$\overrightarrow{AB} = 1\overrightarrow{AB} + 0\overrightarrow{AD}$ donc $B(1; 0)$
$\overrightarrow{AD} = 0\overrightarrow{AB} + 1\overrightarrow{AD}$ donc $D(0; 1)$
Et $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = 1\overrightarrow{AB} + 1\overrightarrow{AD}$ donc $C(1; 1)$

P est le milieu de $[AD]$donc$\overrightarrow{AP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}=0\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$ donc $P\left(0;\frac{1}{2}\right)$
$\overrightarrow{AQ}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+0\overrightarrow{AD}$donc $Q\left(\frac{1}{3};0\right)$
$\overrightarrow{AR}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DR}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}=-1\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AD}$ donc $R(-1;2)$

Ainsi $\overrightarrow{PQ}\begin{pmatrix}\frac{1}{3}-0\\0-\frac{1}{2}\end{pmatrix}=\overrightarrow{PQ}\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{PR}\begin{pmatrix}-1-0\\2-\frac{1}{2}\end{pmatrix}=\overrightarrow{PR}\begin{pmatrix}-1\\\frac{3}{2}\end{pmatrix}$

En regardant les coordonnées on voit que $\overrightarrow{PR}=-3\overrightarrow{PQ}$ donc $\overrightarrow{PQ}$ et $\overrightarrow{PR}$ sont colinéaires et donc (PQ) et (PR) sont parallèles et comme elles partagent le point P, elles sont confondues, ainsi P, Q et R sont alignés.
2) mode expert
$A(0;0)$, $B(1;1)$, $C(1;1)$, $D(0;1)$,
P est le milieu de $[AD]$donc $P\left(0;\frac{1}{2}\right)$,
On sait que $\overrightarrow{AQ}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$donc $Q\left(\frac{1}{3};0\right)$
Comme D est le milieu de $[BR]$ on aura : $D\left(\frac{x_R+x_B}{2};\frac{y_R+y_B}{2}\right)$ donc $(0;1)=\left(\frac{x_R+1}{2};\frac{y_R+0}{2}\right)$

$\Leftrightarrow\begin{cases}0=\frac{x_R+1}{2}\\1=\frac{y_R+0}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}0=x_R+1\\2=y_R\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-1=x_R\\2=y_R\end{cases}$ donc $R(-1;2)$

Ainsi $\overrightarrow{PQ}\begin{pmatrix}\frac{1}{3}-0\\0-\frac{1}{2}\end{pmatrix}=\overrightarrow{PQ}\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{PR}\begin{pmatrix}-1-0\\2-\frac{1}{2}\end{pmatrix}=\overrightarrow{PR}\begin{pmatrix}-1\\\frac{3}{2}\end{pmatrix}$

Regardons si les vecteurs sont colinéaires $xy'-x'y=\frac{1}{3}\frac{3}{2}-\left(-\frac{1}{2}\right)(-1)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=0$
Ainsi $\overrightarrow{PQ}$ et $\overrightarrow{PR}$ sont colinéaires et donc (PQ) et (PR) sont parallèles et comme elles partagent le point P, elles sont confondues, ainsi P, Q et R sont alignés.

Exercice 14

a) $\overrightarrow{AA}=0\overrightarrow{AB}+0\overrightarrow{AC}$ donc $A(0;0)$ de plus $\overrightarrow{AB}=1\overrightarrow{AB}+0\overrightarrow{AC}$ donc $B(1;0)$ et $\overrightarrow{AC}=0\overrightarrow{AB}+1\overrightarrow{AC}$ donc $C(0;1)$
b) $\overrightarrow{AD}=1\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}0-1\\1-0\end{pmatrix}=\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$ donc $D(-1;1)$
c) O est le milieu de [AC] donc $\overrightarrow{AO}=\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right)\begin{pmatrix}0\\1/2\end{pmatrix}$

d) A' milieu de $[BC]$ donc $\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA'}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ donc

$\overrightarrow{AA'}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ donc $A'\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$.

B' milieu de $[AC]$ donc $\overrightarrow{AB'}=\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right)\begin{pmatrix}0\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ donc $B'\left(0;\frac{1}{2}\right)$.

C’ milieu de $[AB]$ donc $\overrightarrow{AC'} = \left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right)\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix}$ donc $C'\left(\frac{1}{2};0\right)$.

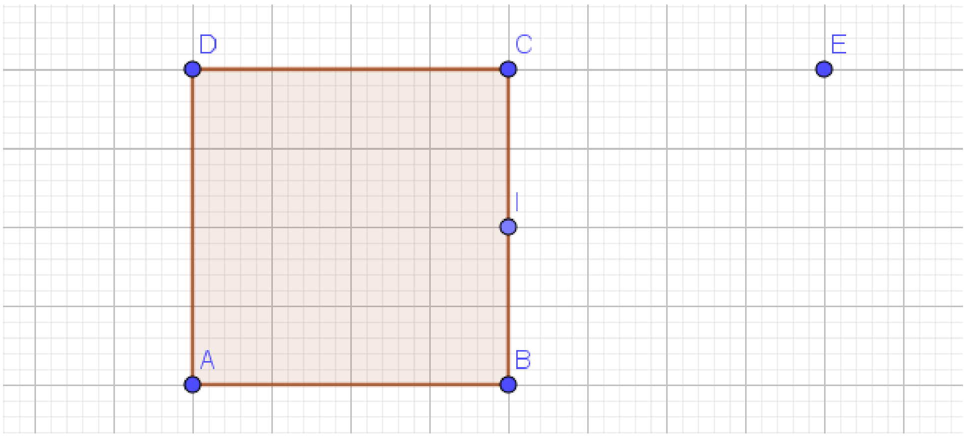
e) d’après le cours de collège

$$\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AA'} \text{ or } \overrightarrow{AA'}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix} \text{ donc } \overrightarrow{AG}\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}\end{pmatrix} \text{ et donc } G\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$$

D’après le cours de seconde

$G\left(\frac{x_A+x_B+x_C}{3};\frac{y_A+y_B+y_C}{3}\right) = G\left(\frac{0+1+0}{3};\frac{0+0+1}{3}\right) = G\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$

Exercice 15



$\frac{1}{2}\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{CE} \Leftrightarrow \frac{1}{2}\overrightarrow{ED} = \overrightarrow{EC} \Leftrightarrow \overrightarrow{ED} = 2\overrightarrow{EC} \Leftrightarrow$ C milieu de $[DE]$

Ainsi $\overrightarrow{DE} = 2\overrightarrow{DC}$

Version alternative

$\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CE} = \overrightarrow{DC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DE}$ donc $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{DC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DE} \Leftrightarrow \overrightarrow{DE} - \frac{1}{2}\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{DC}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \overrightarrow{DE} = 2\overrightarrow{DC}$

2)

3) le repère (D ;C ;A) est associé à la base $(\overrightarrow{DC}; \overrightarrow{DA})$

$\overrightarrow{DD} = 0\overrightarrow{DC} + 0\overrightarrow{DA}$ donc $D(0;0)$

$\overrightarrow{DC} = 1\overrightarrow{DC} + 0\overrightarrow{DA}$ donc $C(1;0)$

$\overrightarrow{DA} = 0\overrightarrow{DC} + 1\overrightarrow{DA}$ donc $A(0;1)$

$\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} = 1\overrightarrow{DC} + 1\overrightarrow{DA}$ donc $B(1;1)$

$\overrightarrow{DI} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CI} = \overrightarrow{DC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{DC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DA}$ donc $I\left(1;\frac{1}{2}\right)$

$\overrightarrow{DE} = 2\overrightarrow{DC} = 2\overrightarrow{DC} + 0\overrightarrow{DA}$ donc $E(2;0)$

c) $\overrightarrow{AI}\begin{pmatrix}1-0\\ \frac{1}{2}-1\end{pmatrix} = \overrightarrow{AI}\begin{pmatrix}1\\ -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix}2-0\\0-1\end{pmatrix} = \overrightarrow{AE}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix} = 2$

or $\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}1\\ -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{AI}$ donc I milieu de $[AE]$

d) le quadrilatère ABEC a donc ses diagonales $[AE]$ et $[BC]$ qui se coupent en leur milieu I, c'est donc un parallélogramme.

Exercice 16

1) $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x_M-3\\y_M-2\end{pmatrix} = \overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-2-(-1)\\2-5\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases}x_M-3=-1\\y_M-2=-3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x_M=-1+3\\y_M=-1\end{cases}$ donc $M(2;-1)$

$\overrightarrow{BN}\begin{pmatrix}x_N-(-1)\\y_N-5\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-2-3\\2-2\end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{BN}\begin{pmatrix}x_N+1\\y_N-5\end{pmatrix} = \left(\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}\right)\begin{pmatrix}-5\frac{1}{3}\\0\frac{1}{3}\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases}x_N+1=-5/3\\y_N-5=0\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_N = -\frac{5}{3} - 1 \\ y_N = 0 + 5 \end{cases} \Leftrightarrow N\left(-\frac{8}{3}; 5\right)$

$\overrightarrow{PA}\begin{pmatrix} 3 - x_P \\ 2 - y_P \end{pmatrix} + \overrightarrow{PB}\begin{pmatrix} -1 - x_P \\ 5 - y_P \end{pmatrix} + \overrightarrow{PC}\begin{pmatrix} -2 - x_P \\ -2 - y_P \end{pmatrix} = \vec{0}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3 - x_P + (-1 - x_P) + (-2 - x_P) = 0 \\ 2 - y_P + (5 - y_P) + (-2 - y_P) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 - 1 - 2 - 3x_P = 0 \\ 2 + 5 - 2 - 3y_P = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 = 3x_P \\ 5 = 3y_P \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = x_P \\ \frac{5}{3} = y_P \end{cases} \Leftrightarrow P\left(0; \frac{5}{3}\right)$

2) comme $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BC}$, AMCB est un parallélogramme.

$\overrightarrow{BN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ donc $\overrightarrow{BN}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires donc BNCA est un trapeze.

3) I milieu de $[BC]$ donc $I\left(\frac{x_B+x_C}{2}; \frac{y_B+y_C}{2}\right) = I\left(\frac{-1-2}{2}; \frac{5-2}{2}\right) = I\left(-\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right)$

$\overrightarrow{AP}\begin{pmatrix} x_P - 3 \\ y_P - 2 \end{pmatrix} = \overrightarrow{AP}\begin{pmatrix} 0 - 3 \\ \frac{5}{3} - 2 \end{pmatrix} = \overrightarrow{AP}\begin{pmatrix} -3 \\ \frac{-1}{3} \end{pmatrix}$

$\left(\frac{2}{3}\overrightarrow{AI}\right)\begin{pmatrix} \frac{2}{3}\left(-\frac{3}{2} - 3\right) \\ \frac{2}{3}\left(\frac{3}{2} - 2\right) \end{pmatrix} = \left(\frac{2}{3}\overrightarrow{AI}\right)\begin{pmatrix} \frac{2}{3}\left(-\frac{9}{2}\right) \\ \frac{2}{3}\left(\frac{-1}{2}\right) \end{pmatrix} = \left(\frac{2}{3}\overrightarrow{AI}\right)\begin{pmatrix} -3 \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$

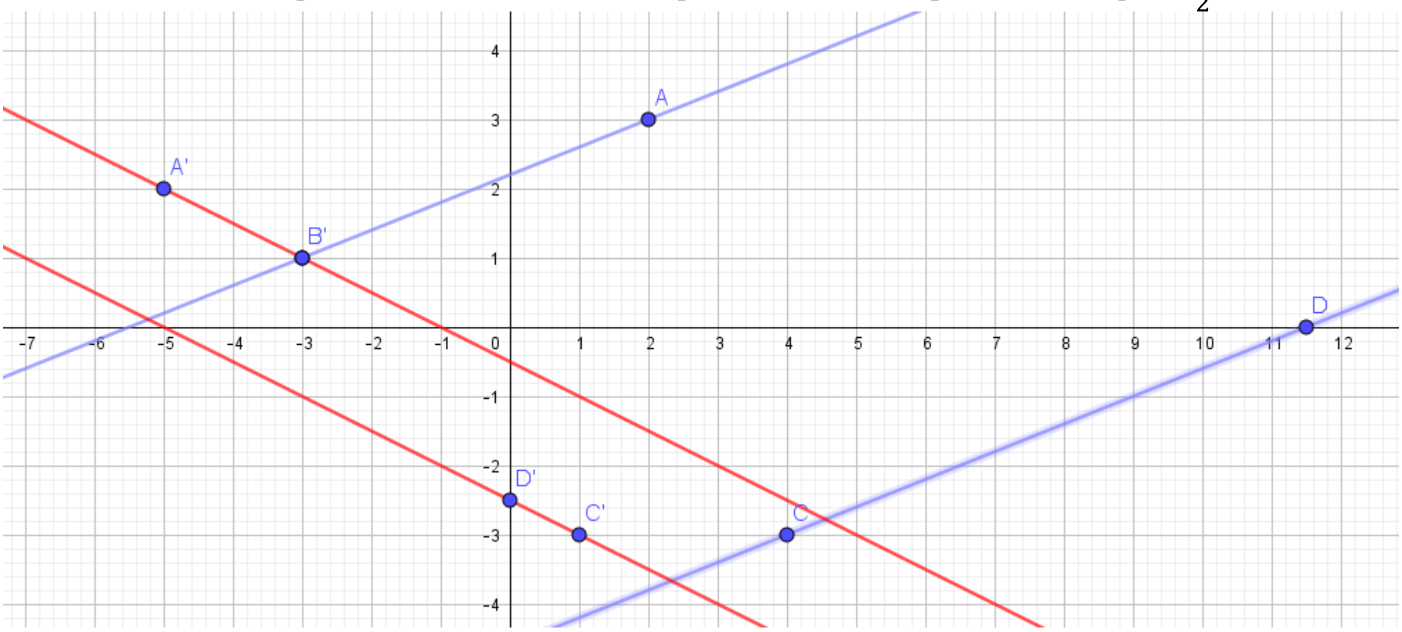
Donc on a bien $\overrightarrow{AP} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AI}$

Dans ABC [AI] est la médiane issue de A, et comme P est situé au deux tiers de celle-ci en partant du sommet, P est le centre de gravité du triangle.

Exercice 17

1) Comme D est sur l'axe des abscisses son ordonnée vaut 0 et donc on aura les vecteurs $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -3 - 2 \\ 1 - 3 \end{pmatrix} = \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -5 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} x_D - 4 \\ 0 - (-3) \end{pmatrix} = \overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} x_D - 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ colinéaires , c'est-à-dire :

$-5 \times 3 - (-2)2(x_D - 4) = 0 \Leftrightarrow -15 + 2x_D - 8 = 0 \Leftrightarrow 2x_D = 23 \Leftrightarrow x_D = \frac{23}{2}$



2) Comme D est sur l'axe des ordonnées son abscisse vaut 0 et donc on aura les vecteurs $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -3 - (-5) \\ 1 - 2 \end{pmatrix} = \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} 0 - 1 \\ y_D - (-3) \end{pmatrix} = \overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} -1 \\ y_D + 3 \end{pmatrix}$ colinéaires , c'est-à-dire :

$2(y_D+3)-(-1)(-1)=0 \Leftrightarrow 2y_D+6-1=0 \Leftrightarrow 2y_D=-5 \Leftrightarrow y_D=\frac{-5}{2}$

Exercice 18

$\overrightarrow{CM}\begin{pmatrix}x_M-(-4)\\y_M-(-2)\end{pmatrix}=x\vec{u}\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{CM}\begin{pmatrix}x_M+4\\y_M+2\end{pmatrix}=(x\vec{u})\begin{pmatrix}2x\\5x\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases}x_M+4=2x\\y_M+2=5x\end{cases} \Leftrightarrow$

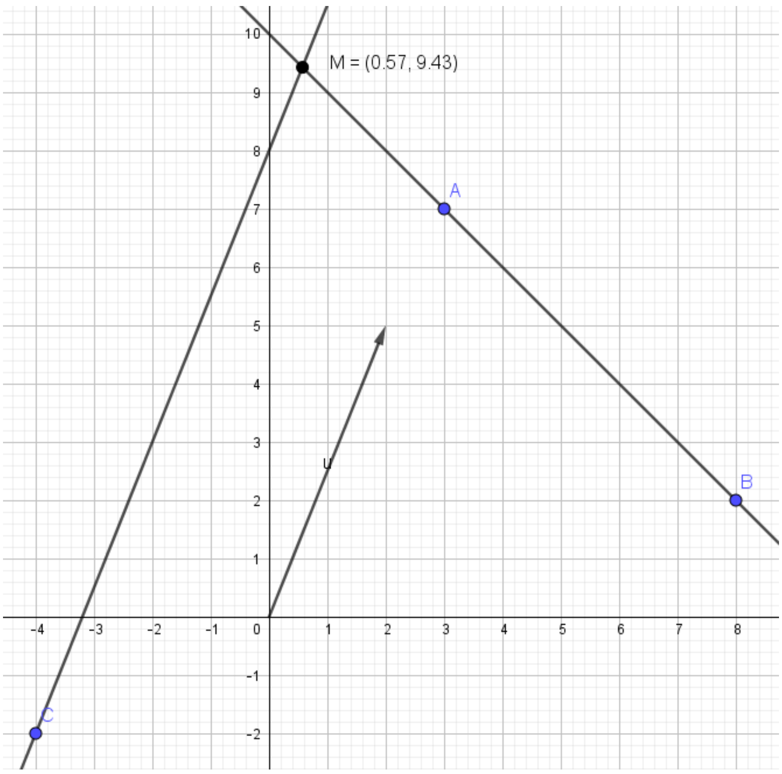
$\begin{cases}x_M=2x-4\\y_M=5x-2\end{cases}$

$\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x_M-3\\y_M-7\end{pmatrix}=\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}2x-4-3\\5x-2-7\end{pmatrix}=\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}2x-7\\5x-9\end{pmatrix}$

$M\in(AB) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}2x-7\\5x-9\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}8-3\\2-7\end{pmatrix}=\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}5\\-5\end{pmatrix}$ colinéaires

$\Leftrightarrow (2x-7)(-5)-(5x-9)5=0 \Leftrightarrow -10x+35-25x+45=0$

$\Leftrightarrow -35x+80=0 \Leftrightarrow 80=35x \Leftrightarrow \frac{80}{35}=x \Leftrightarrow \frac{16}{7}=x$



Exercice 19

Déterminons AT et BT

$AT=\sqrt{(1-1)^2+(-3-2)^2}=\sqrt{0^2+(-5)^2}=5$

$BT=\sqrt{(1-5)^2+(-3-0)^2}=\sqrt{(-4)^2+(-3)^2}=\sqrt{16+9}=\sqrt{25}=5$

On a donc $AT=BT$

Exercice 20

Plusieurs approches :

1) Prouver que les quatre côtés ont la même mesure.
2) Regarder les vecteurs opposés, constater leur égalité => parallélogramme. Déterminer les mesures de deux côtés consécutifs et vérifier qu'ils sont égaux.
3) prouver que les diagonales se coupent perpendiculairement en leur milieu.

a. Il faut déterminer les coordonnées des milieux des deux diagonales.
b. Vérifier qu'ils coïncident
c. Calculer les mesures de deux demi diagonales et d'un côté pour utiliser la réciproque de théorème de Pythagore pour prouver que les diagonales se coupent perpendiculairement.

4) Prouver que les quatre côtés ont la même mesure

Je vais utiliser la méthode 2

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3-2\\0-2\end{pmatrix} = \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}2-1\\-2-0\end{pmatrix} = \overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$

Ainsi $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ donc ABCD est un parallélogramme

$AB = \sqrt{1^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}$

$AD = \sqrt{(1-2)^2 + (0-2)^2} = \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}$

ABCD est donc un parallélogramme avec deux côtés consécutifs de même longueur, c'est donc un losange.

Exercice 21

1) $AB = \sqrt{\left(1-(-1)\right)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$

$BC = \sqrt{(3-1)^2 + (-2-2)^2} = \sqrt{2^2 + (-4)^2} = \sqrt{20}$

$CA = \sqrt{\left(3-(-1)\right)^2 + (-2-1)^2} = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = \sqrt{25} = 5$

On a donc $CA^2 = AB^2 + BC^2$ donc d'après la réciproque du théorème de Pythagore on a : ABC rectangle en B

2) donc le milieu de son hypoténuse sera le centre de son cercle circonscrit, ainsi

$\Omega\left(\frac{3+(-1)}{2}; \frac{-2+1}{2}\right) = \Omega\left(1; \frac{-1}{2}\right)$

$r = \frac{CA}{2} = 2{,}5$ ainsi $\mathcal{C}\left(\Omega\left(1; \frac{-1}{2}\right); \frac{5}{2}\right)$

3) $\Omega\mathrm{E} = \sqrt{(3-1)^2 + \left(1 - \frac{-1}{2}\right)^2} = \sqrt{2^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{4 + \frac{9}{4}} = \sqrt{\frac{16}{4} + \frac{9}{4}} = \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2} = r$

Le point E est donc situé à 2,5 unités de Ω donc il est bien sur le cercle $\mathcal{C}$

4) dans ABC rectangle en B $\cos\left(\widehat{ACB}\right) = \frac{adj}{hyp} = \frac{CB}{AC} = \frac{\sqrt{20}}{5}$

$\widehat{ACB} = \cos^{-1}\frac{\sqrt{20}}{5} = 27°$