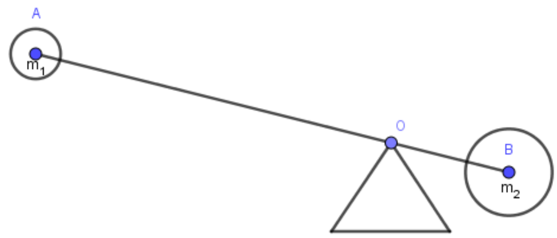
www.dimension-k.com

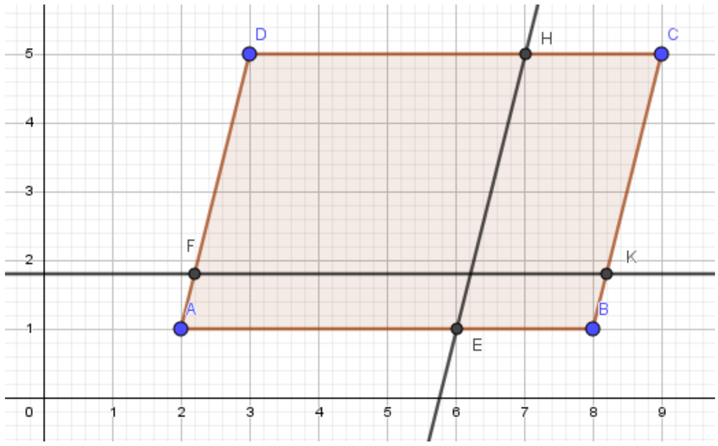
Devoir maison pour le mardi 12 janvier

Exercice 1 :



On utilise une planche d'extrémités A et B posée sur un support triangulaire en O et sur laquelle on accroche deux objets de masse m_1 et m_2.
La planche est en équilibre quand : $m_1\overrightarrow{OA} + m_2\overrightarrow{OB} = \vec{0}$
1. Montrer que si $m_1 + m_2 \neq 0$, on a $\overrightarrow{AO} = \frac{m_2}{(m_1+m_2)}\overrightarrow{AB}$
2. Montrer que si $m_1 = m_2$ alors le point d'équilibre est le milieu du segment $[AB]$.
3. On a une planche d'un mètre, un poids $m_1 = 5kg$ et un poids $m_2 = 3kg$. Faire une figure à l'échelle $\frac{1}{10}$ (c'est-à-dire 1cm sur la figure en représente 10 dans la réalité). Puis placer le point O.
4. on a un poids inconnu en A et un poids de 15kg en B, de plus on sait que le point O vérifie $\overrightarrow{OA} = -3\overrightarrow{OB}$. Dans l'ordre que vous voulez déterminer l'emplacement du point O et le poids situé en A pour obtenir un tel équilibre.
Conseil : trouver le moyen de passer de la forme $\overrightarrow{OA} = -3\overrightarrow{OB}$ à la forme $m_1\overrightarrow{OA} + 15\,\overrightarrow{OB} = \vec{0}$

Exercice 2



On considère les points $A(2;1)$, $B(8;1)$, $C(9;5)$ et $D(3;5)$.
E et F sont deux points quelconques situés respectivement sur les segments $[AB]$ et $[AD]$.
La parallèle à la droite(AD)passant par E coupe la droite (DC) en H.
La parallèle à la droite(AB)passant par F coupe la droite (BC) en K.

1. Montrer que ABCD est un parallélogramme.

Pour traiter cette question il serait profitable de prouver que deux vecteurs bien choisis sont égaux. Pour cela jusqu'ici on pouvait se contenter de compter les carreaux permettant d'aller d'une origine jusqu'à l'extrémité, et en constatant que l'on deux déplacements identiques pour les deux vecteurs considérés on pouvait conclure qu'ils étaient égaux. Là nous allons procéder autrement. ***Nous allons faire quelque chose de complètement nouveau, nous allons déterminer les coordonnées de $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{BC}$, et en constatant qu'elles sont identiques on pourra conclure que ces vecteurs sont égaux, et de là on pourra conclure.***

Méthode : déterminer les coordonnées d'un vecteur.
Pour déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AC}$ je vais soustraire les coordonnées respectives de l'extrémité et de l'origine
$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} x_C - x_A \\ y_C - y_A \end{pmatrix} = \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 9-2 \\ 5-1 \end{pmatrix} = \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix}$
Ces coordonnées ont du sens : si on va du point A au point C on avance de 7 carreaux et on monte de 4.

Conseil :
Pour vous entrainer, sur votre brouillon, vous pouvez prouver que le vecteur $\overrightarrow{DB}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 5 \\ -4 \end{pmatrix}$ (ce qui a du sens vu que pour aller de D à B on avance de 5 et descend de 4 carreaux)

2. Dans cette question, E et F sont définis par : $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$
   a. Faire une figure

Vous la tracerez dans un repère dont l'axe des abscisses va de -2 à 10 et dont l'axe des ordonnées va de -2 à 6.

   b. Tracer les droites (AC) et (EK). Elles se coupent en un point que l'on nommera M. Lire les coordonnées de ce point.

Attention : ceci n'est qu'une interprétation graphique, rien ne nous dit que les coordonnées lues sont assez précises.

   c. En supposant que les coordonnées sont justes. Prouver que les points M, F et H sont alignés.

Pour faire ça, il vous faut commencer par calculer les coordonnées des points F, H, E et K.

Exemple : on sait que $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$ *et donc* $\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix} x_E - x_A \\ y_E - y_A \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}\right)$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AE}\begin{pmatrix} x_E-2 \\ y_E-1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 8-2 \\ 1-1 \end{pmatrix}\right) \Leftrightarrow \overrightarrow{AE}\begin{pmatrix} x_E-2 \\ y_E-1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AE}\begin{pmatrix} x_E-2 \\ y_E-1 \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} \frac{1}{4}6 \\ \frac{1}{4}0 \end{pmatrix}\right)$

(multiplier un vecteur par un nombre revient à multiplier chacune de ses coordonnées par le nombre)

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AE}\begin{pmatrix} x_E-2 \\ y_E-1 \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 1,5 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x_E-2=1,5 \\ y_E-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_E=1,5+2 \\ y_E=0+1 \end{cases}$ *ainsi le point E a pour coordonnées* $E(3,5;1)$

Pour les points H et K on pourra admettre que $\overrightarrow{DH}=\overrightarrow{AE}$ *et que* $\overrightarrow{BK}=\overrightarrow{AF}$

Dans un deuxième temps vous allez calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{FH}$ *et* $\overrightarrow{FM}$ *puis vous trouverez k le coefficient de proportionnalité permettant de passer des coordonnées de* $\overrightarrow{FM}$ *à celle de* $\overrightarrow{FH}$*. On dira alors que* $\overrightarrow{FM}=k\overrightarrow{FH}$*. Il vous suffira alors de déduire la conclusion attendue grâce à votre cours.*

d. *Prouver maintenant que les coordonnées conjecturées à la question b. sont justes.*

De ma même manière qu'à la question précédente vous allez prouver que M avec vos coordonnées lues est aligné avec A et C , puis avec E et K.

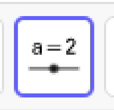
3. Dans cette question, E et F sont deux points tels que $\overrightarrow{AE}=a\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AF}=b\overrightarrow{AD}$ où a et b sont deux réels appartenant à l'intervalle $[0\,;1]$.

a. A l'aide de Geogebra construire la figure.

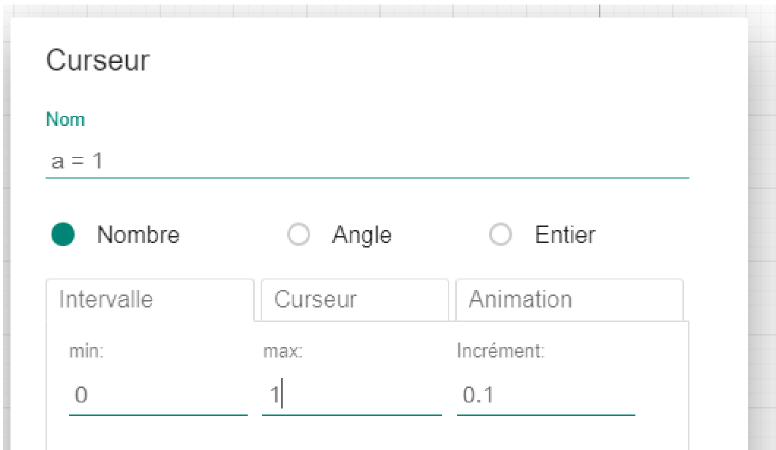
Geogebra est intégré à votre ordinateur dans la suite logicielle MCNL. Si vous l'avez perdu, vous pouvez toujours utiliser la version en ligne disponible à l'adresse : https://www.geogebra.org/classic?lang=fr

Pour placer E et F :

Il faut créer deux curseurs a *et* b *dans* $[0;1]$*. Pour cela on clique sur l'icône curseur :*



Puis vous remplissez le formulaire de la manière ci-contre :



*Une fois que c'est fait on tapera dans la barre de saisie : E=A+a*vecteur(A,B) et F=A+b*vecteur(A,D)*

*Attention Geogebra va transformer votre * en point puis finira par faire disparaitre complètement le symbole une fois que vous aurez appuyé sur « entrée ».*

b. En animant les curseurs a et b, conjecturer une condition portant sur a et b pour que les droites (FH) et (EK) soient parallèles.

Animer le curseur veut dire que vous allez placer votre pointeur sur le point du curseur et vous allez déplacer ce dernier vers la droite et la gauche ce qui va faire bouger le point E (si vous jouez avec le curseur a*) ou le point F (si vous jouez avec le curseur* b*) Pour faire votre conjecture il est important que vous ayez tracé les droites (FH) et (EK).*

c. Exprimer les coordonnées de E en fonction de a et celles de F en fonction de b.

Voici un exemple analogue qui fera office de méthode :

Imaginez que vous vous intéressiez à un point $M(x_M;y_M)$ *vérifiant* $\overrightarrow{AM}=k\vec{u}$ *avec* $A(-5;7)$ *et* $\vec{u}\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ *et qu'on vous demande d'exprimer les coordonnées de M en fonction de* k *.*

$\overrightarrow{AM}=k\vec{u} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x_M-(-5) \\ y_M-7 \end{pmatrix} = k\left(\vec{u}\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}\right) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x_M+5 \\ y_M-7 \end{pmatrix} = k\vec{u}\begin{pmatrix} k3 \\ k(-2) \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M+5=3k \\ y_M-7=-2k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M=3k-5 \\ y_M=-2k+7 \end{cases}$

d. Démontrer la conjecture faite à la question 3.b.

Méthode possible : Maintenant que vous avez exprimé les coordonnées de E et F respectivement en fonction de a *et* b*. Vous êtes en mesure d'exprimer les coordonnées de H et K puis celle des vecteurs* $\overrightarrow{FH}$ *et* $\overrightarrow{EK}$ *aussi respectivement en fonction de a et b. Vous pouvez partir du parallélisme entre (FH) et (EK), en déduire que les vecteurs* $\overrightarrow{FH}$ *et* $\overrightarrow{EK}$ *sont colinéaires ce qui vous permettra de déduire que leurs coordonnées sont proportionnelles, ce qui aboutira à une équation qui prouvera votre conjecture.*

Remarque : on peut aussi exprimer les vecteurs $\overrightarrow{FH}$ *et* $\overrightarrow{EK}$ *en fonction de* $\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{AD}$ *et comme ils sont censé être proportionnels, on aura une situation de proportionnalité entre les coefficients trouvés.*

Annexe :

Exercice 1

Pour la première question vous pouvez vous inspirer de l'exercice 3 du DM facultatif précédent. A titre de rappel voici le sujet et sa correction :

Exercice 3

soit [AB] un segment horizontal de 5 carreaux, Soit C un point vérifiant $7\overrightarrow{AC} - 2\overrightarrow{BC} = \vec{0}$. Exprimer $\overrightarrow{AC}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$

$7\overrightarrow{AC} - 2\overrightarrow{BC} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow 7\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{BC}$

$\Leftrightarrow 7\overrightarrow{AC} = 2(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC})$

$\Leftrightarrow 7\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{AC}$

$\Leftrightarrow 7\overrightarrow{AC} - 2\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{BA}$

$\Leftrightarrow 5\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{BA}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AC} = \frac{2}{5}\overrightarrow{BA}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AC} = -\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}$

on a remarqué que $\overrightarrow{BC}$ n'était pas un vecteur adapté à notre objectif on l'a donc « explosé » avec le relation de Chasles au bon endroit et permettant de faire apparaitre des vecteurs conformes à la conclusion

Exercice 2 question 3d

Soit $\binom{a}{b}$ et $\binom{c}{d}$ deux couples non entièrement nuls, s ils sont proportionnels alors :

- *Le tableau :*

a	*c*
b	*d*

  est de proportionalité

- *Il existe un réel k tel qu'on peut passer d'un couple à l'autre en multipliant les valeurs par k*
  Autrement dit $c = ka$ et $d = kb$
- *Les produits des diagonales sont égaux.*
  Autrement dit $ad = bc$

Remarque la réciproque est aussi vraie

Exemples :

1) *Si on a $\overrightarrow{FH}\binom{i}{j}$ et $\overrightarrow{EK}\binom{k}{l}$ colinéaires alors les coordonnées sont proportionnelles et donc $i \times l = j \times k$*
2) *Si on a $\overrightarrow{FH}$ et $\overrightarrow{EK}$ colinéaires avec $\overrightarrow{FH} = i\overrightarrow{AB} + j\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{EK} = k\overrightarrow{AB} + l\overrightarrow{AD}$ alors i et j sont proportionnel avec k et l, autrement dit $i \times l = j \times k$*