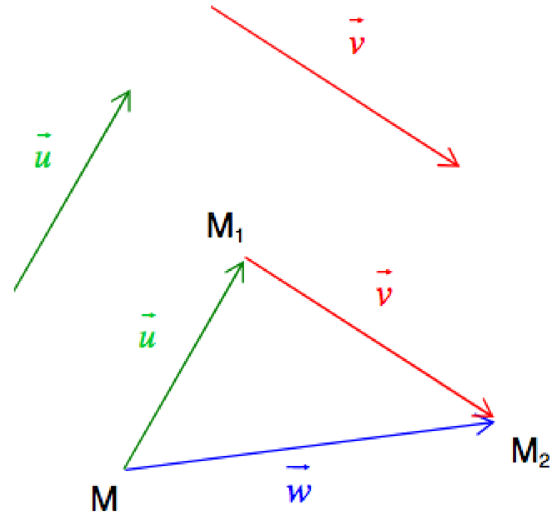
LES VECTEURS (partie 2)

I. Somme de vecteurs

1. Définition



Exemple :

Soit t_1 la translation de vecteur $\vec{u}$
et t_2 est la translation de vecteur $\vec{v}$.

Appliquer la translation t_1 puis la translation t_2 :

$M \overset{t_1}{\longmapsto} M_1 \overset{t_2}{\longmapsto} M_2$

revient à appliquer la translation t de vecteur $\vec{w}$:

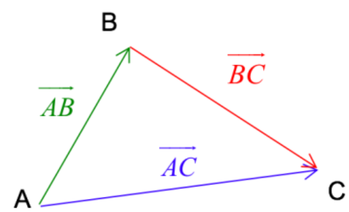
$M \overset{t}{\xrightarrow{\hspace{3em}}} M_2$

Propriété :
La composée (ou l'enchaînement) de deux translations est une translation.

Définition :
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs quelconques.
On appelle **somme** des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, notée $\vec{u} + \vec{v}$, le vecteur $\vec{w}$ associé à la translation composée des translations de vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

2. Une relation fondamentale

La relation de Chasles :
Pour tous points A, B et C du plan, on a : $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$.



Remarque :
Dans le triangle ABC, on a également les relations : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$
$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}$.

Méthode : Appliquer la relation de Chasles (non exigible)

Vidéo https://youtu.be/fbVrdYiY0qc

Simplifier les écritures :

a) $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MN}$ b) $\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{AM}$ c) $\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{KO} + \overrightarrow{NK}$

d) $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NM}$ e) $\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{PM} + \overrightarrow{OP}$ f) $\overrightarrow{KN} - \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OK}$

a) $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MN}$
$= \overrightarrow{AN}$

b) $\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{AM}$
$= \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MP}$
$= \overrightarrow{AP}$

c) $\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{KO} + \overrightarrow{NK}$
$= \overrightarrow{KO} + \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{NK}$
$= \overrightarrow{KP} + \overrightarrow{NK}$
$= \overrightarrow{NK} + \overrightarrow{KP} = \overrightarrow{NP}$

d) $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NM}$
$= \overrightarrow{MM}$
$= \vec{0}$

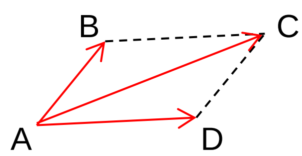
e) $\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{PM} + \overrightarrow{OP}$
$= \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PM}$
$= \overrightarrow{MP} + \overrightarrow{PM}$
$= \overrightarrow{MM} = \vec{0}$

f) $\overrightarrow{KN} - \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OK}$
$= \overrightarrow{KN} + \overrightarrow{NO} + \overrightarrow{OK}$
$= \overrightarrow{KO} + \overrightarrow{OK}$
$= \overrightarrow{KK} = \vec{0}$

3. Conséquence :

Propriété caractéristique du parallélogramme :

Dire que ABCD est un parallélogramme revient à dire que $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$,



Démonstration :

D'après la relation de Chasles, l'égalité $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ peut s'écrire :

$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$

Soit $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$,

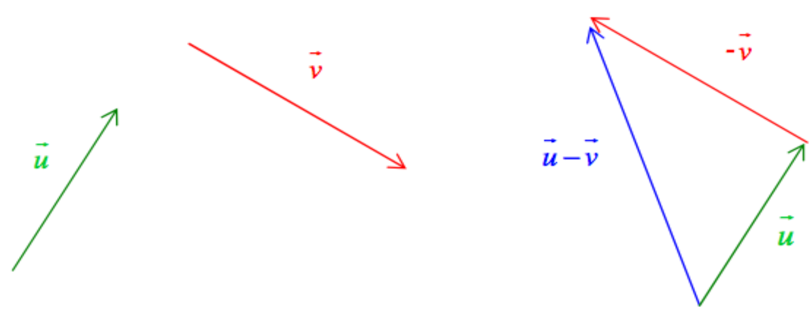
soit encore : ABCD est un parallélogramme.

4. Différence de deux vecteurs

Définition :

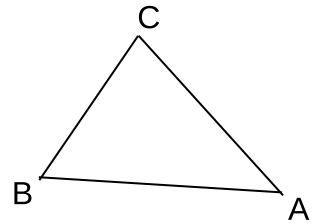
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs quelconques.

On appelle **différence** du vecteur $\vec{u}$ avec le vecteur $\vec{v}$, le vecteur noté $\vec{u} - \vec{v}$, tel que : $\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$.

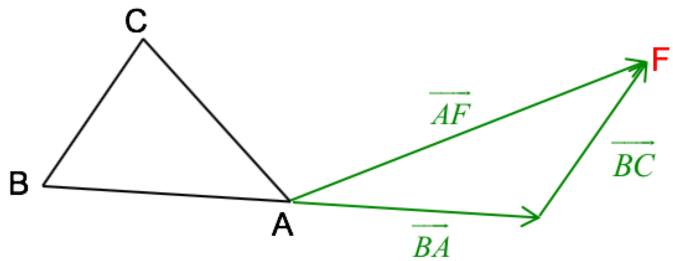


Méthode : Construire un point défini à partir d'une somme de vecteurs

Vidéo https://youtu.be/nzABUzFM6p8



Soit un triangle ABC.
Construire le point *F* tel que $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$

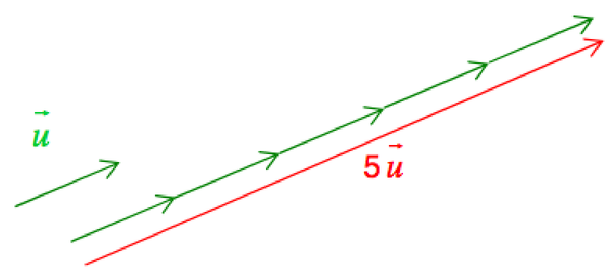


On construit à partir de *A* (origine de $\overrightarrow{AF}$) le vecteur $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$ en mettant « bout à bout » les vecteurs $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BC}$.
On a ainsi construit un vecteur $\overrightarrow{AF}$ et donc le point *F*.

II. Produit d'un vecteur par un réel

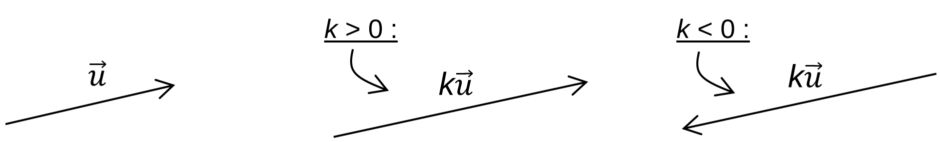
1. Définition

Exemple :
Soit $\vec{u}$ un vecteur du plan.
Appliquer 5 fois la translation de vecteur $\vec{u}$ revient à appliquer la translation de vecteur :
$\vec{w} = \vec{u} + \vec{u} + \vec{u} + \vec{u} + \vec{u} = 5\vec{u}$



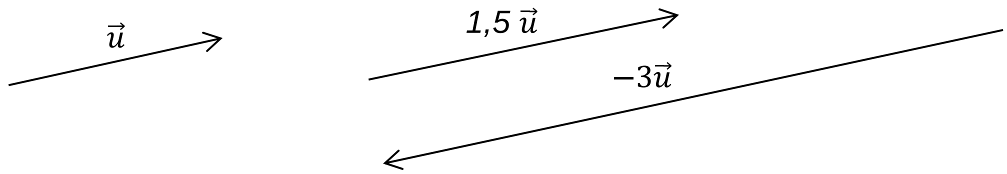
Remarques :
- Les vecteurs $5\vec{u}$ et $\vec{u}$ ont la même direction et le même sens.
- La norme du vecteur $5\vec{u}$ est égale à 5 fois la norme du vecteur $\vec{u}$.

Définition :
$\vec{u}$ est un vecteur quelconque différent de $\vec{0}$ et *k* un nombre réel non nul.
On appelle **produit** du vecteur $\vec{u}$ par le réel *k*, le vecteur noté $k\vec{u}$:
- de même direction que $\vec{u}$,
- de même sens que $\vec{u}$ si k > 0 et de sens contraire si k < 0,
- de norme égale à : k fois la norme de $\vec{u}$ si k > 0,
–k fois norme de $\vec{u}$ si k < 0.



<u>Remarque :</u>
Si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $k = 0$ alors $k\vec{u} = \vec{0}$.

<u>Exemples :</u>



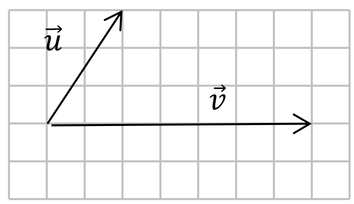
Les vecteurs $\vec{u}$, *1,5* $\vec{u}$ et $-3\vec{u}$ ont la même direction.
$\vec{u}$ et *1,5* $\vec{u}$ sont de même sens.
$\vec{u}$ et $-3\vec{u}$ sont de sens contraire.
La norme du vecteur *1,5* $\vec{u}$ est égale à 1,5 fois la norme de $\vec{u}$.
La norme du vecteur $-3\vec{u}$ est égale à 3 fois la norme de $\vec{u}$.

2. <u>Construction</u>

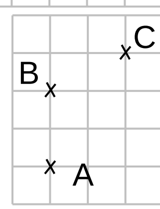
<u>Méthode :</u> Représenter un vecteur défini comme produit et somme de vecteurs

Vidéo https://youtu.be/1C6KEwbO-b8

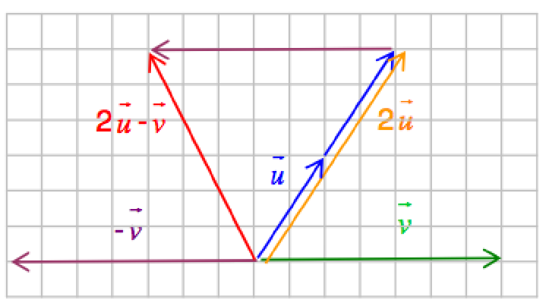
1) Soit deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
Représenter les vecteurs suivants :
$2\vec{u}$, $-\vec{v}$, $2\vec{u} - \vec{v}$.



2) Soit trois points A, B et C.
Représenter le vecteur $\overrightarrow{BC} - 3\overrightarrow{AC}$.



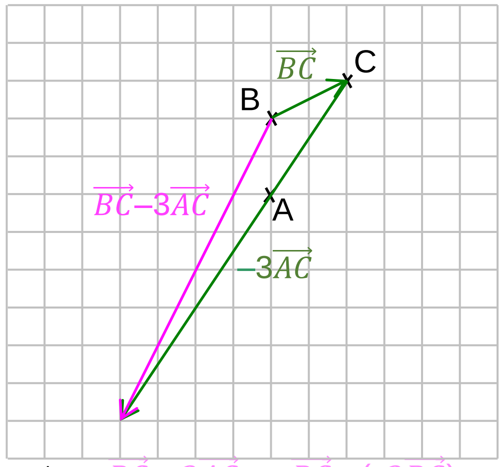
1)



Pour représenter le vecteur $2\vec{u}$, on place bout à bout deux vecteurs $\vec{u}$.
Pour représenter le vecteur $-\vec{v}$, on représente un vecteur de même direction et même longueur que $\vec{v}$ mais de sens opposé.
Pour représenter le vecteur $2\vec{u} - \vec{v}$ ou $2\vec{u} + (-\vec{v})$, on place bout à bout les vecteurs $2\vec{u}$ et $-\vec{v}$.
Dans « *le chemin* » de vecteurs ainsi construit, le vecteur $2\vec{u} - \vec{v}$ a pour origine l'origine du vecteur $2\vec{u}$ et pour extrémité, l'extrémité du vecteur $-\vec{v}$.

On obtiendrait le même résultat en commençant par placer le vecteur $-\vec{v}$ et ensuite le vecteur $2\vec{u}$.

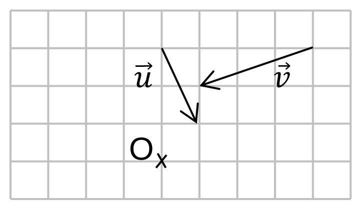
2)



Pour représenter le vecteur $\overrightarrow{BC} - 3\overrightarrow{AC}$ ou $\overrightarrow{BC} + (-3\overrightarrow{BC})$, on place bout à bout les vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $-3\overrightarrow{AC}$.

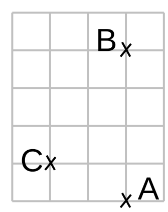
Méthode : Construire un point vérifiant une égalité vectorielle

Vidéo **https://youtu.be/JxYpPE6iPEA**

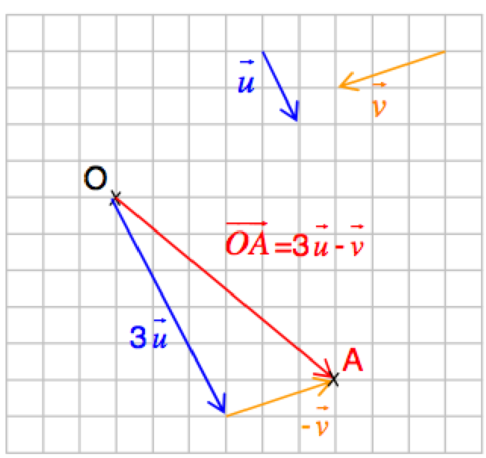


1) Soit deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et un point O du plan.
Construire le point A tel que $\overrightarrow{OA} = 3\vec{u} - \vec{v}$.

2) Soit trois points A, B, C du plan.
Construire le point M tel que $\overrightarrow{AM} = -\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}$.



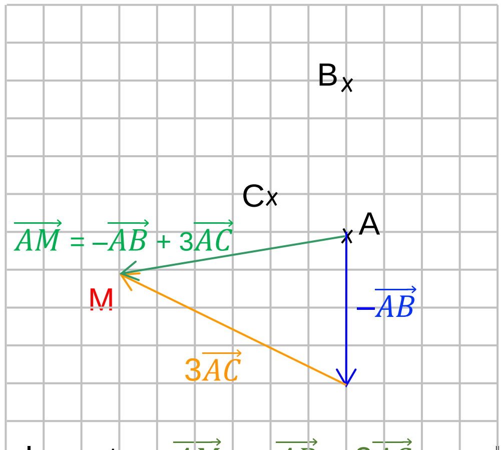
1)



Pour représenter le vecteur $\overrightarrow{OA} = 3\vec{u} - \vec{v}$, on place bout à bout à partir du point O les vecteurs $3\vec{u}$ et $-\vec{v}$.

Le point A se trouve à l'extrémité du vecteur $-\vec{v}$ dans « *le chemin* » de vecteurs ainsi construit.

2)



Pour représenter le vecteur $\overrightarrow{AM} = -\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}$, on place bout à bout à partir de A les vecteurs $-\overrightarrow{AB}$ et $3\overrightarrow{AC}$.

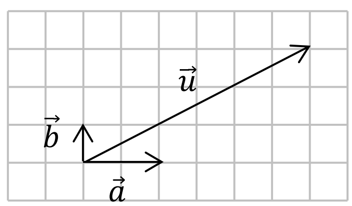
Le point M se trouve à l'extrémité du vecteur $3\overrightarrow{AC}$ dans « *le chemin* » de vecteurs ainsi construit.

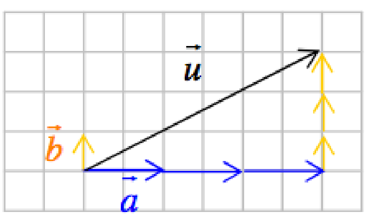
Activité de groupe : Course d'orientation *http://www.maths-et-tiques.fr/telech/Course_vect.pdf*

Méthode : Exprimer par lecture graphique un vecteur en fonction d'autres vecteurs

Vidéo **https://youtu.be/ODZGKdIKewo**

Par lecture graphique, exprimer le vecteur $\vec{u}$ en fonction des vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$.





On construit « *un chemin* » de vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ mis bout à bout reliant l'origine et l'extrémité du vecteur $\vec{u}$.

On compte ainsi le nombre de vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ formant « *le chemin* ».

$\vec{u} = 3\vec{a} + 3\vec{b}$.

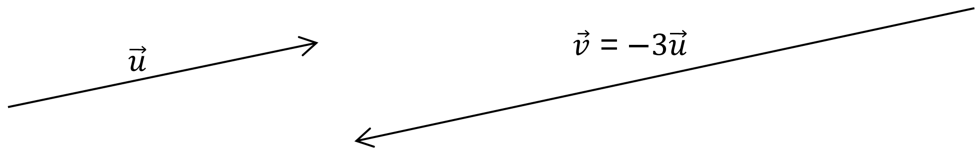
III. Notion de colinéarité

1. Définition

Définition :
Deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** signifie qu'ils ont même direction c'est à dire qu'il existe un nombre réel *k* tel que $\vec{u} = k\vec{v}$.

Remarque :
Le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur du plan.

Exemple :
$\vec{v} = -3\vec{u}$
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.



Méthode : Démontrer que des vecteurs sont colinéaires

Vidéo https://youtu.be/FjUbd9Pbhmg

On donne $\vec{u}$ un vecteur du plan. Soit un vecteur $\vec{v}$ tel que $-4\vec{u} + 3\vec{v} = \vec{0}$.
Démontrer que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

$-4\vec{u} + 3\vec{v} = \vec{0}$ donc $-4\vec{u} = -3\vec{v}$ et donc $\frac{4}{3}\vec{u} = \vec{v}$

Il existe un nombre réel $k = \frac{4}{3}$ tel que $\vec{v} = k\vec{u}$. Et donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont donc colinéaires.

2. Applications

Propriétés :
1) A, B, C et D étant quatre points deux à deux distincts du plan.
Dire que les droites (AB) et (CD) sont parallèles revient à dire que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

2) Dire que les points distincts A, B et C sont alignés revient à dire que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

3. Transformations et vecteurs

Propriétés :
1) Si une symétrie centrale transforme A en A' et B en B' alors : $\overrightarrow{A'B'} = -\overrightarrow{AB}$.
2) Si une homothétie de rapport λ transforme A en A' et B en B' alors : $\overrightarrow{A'B'} = \lambda\overrightarrow{AB}$.