Démonstration par l'absurde
de la propriété « $\sqrt{2}$ n'est pas un rationnel »

Après avoir lu l'exemple déterminer la négation des propositions suivantes :

J'habite au pôle Nord : Je n'habite pas au pôle Nord (le pôle sud est une possibilité mais il y en a bien d'autres)

Il pleut : ……………………………………………………………………………………………………

J'ai 20 ans : ……………………………………………………………………………………………

J'ai strictement plus de 10€ : …………………………………………………………………………

j'ai au moins trois frères et sœurs : ……………………………………………………………………

$\sqrt{2}$ n'est pas un rationnel : ……………………………………………………………………

Une démonstration par l'absurde d'une propriété P est une démonstration où l'on commence par supposer que P n'est pas vrai, puis dans laquelle on prouve par implications successives que ça aboutit à une situation impossible, c'est-à-dire que l'on trouve une conséquence en contradiction avec une des hypothèses de départ, ainsi P ne peut « ne pas être vraie » autrement dit P est nécessairement vraie.

Montrons que $\sqrt{2}$ n'est pas un rationnel par l'absurde

1) Supposons que $\sqrt{2}$ est ………………..
   Ça veut dire qu'on peut écrire cette racine sous la forme d'un quotient irréductible : $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ avec a et b deux entiers.
2) Ainsi $2 = \frac{\cdots\cdots}{\cdots\cdots}$ et donc $a^2 =$………….
3) Si un nombre a pour chiffre des unités u alors on peut l'écrire sous la forme $a = (10d + u)$ avec d un entier et donc son carré sera : $(10d + u)^2 =$………………………………. et donc le chiffre des unités de a^2, sera le chiffre des unités de ……………
4) Compléter les tableaux suivants :

chiffre des unités de	
a	a²
0	
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	9
8	
9	

chiffre des unités de	
b	2b²
0	
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	

Explication de la ligne en gris : d'après la question 3) le chiffre des unités de a^2 est le chiffre des unités du carré du chiffre des unités de a. Le carré de **7** est 4**9**, nombre dont le chiffre des unités de a^2 est **9**.

5) Etant donné que le chiffre des unités de a^2 et $2b^2$ doit être le même, quels sont le ou les chiffres des unités possibles pour a^2 et $2b^2$?
   ………………………………………………………
6) Le chiffre des unités de a sera nécessairement : ………………… et donc a aura pour diviseurs …………………………………………………
7) Le chiffre des unités de b sera nécessairement : ………………… et donc dans tous les cas b aura pour diviseur ………
8) Ainsi $\frac{a}{b}$ est simplifiable par ……. ce qui contredit le fait que $\frac{a}{b}$ était une fraction …………………..
9) Conclusion : $\sqrt{2}$ …………………………………………

Correction

Il pleut : il ne pleut pas

J'ai 20 ans : je n'ai pas 20 ans

Je n'ai pas sommeil : j'ai sommeil

J'ai strictement plus de 10€ : j'ai dix euros ou moins.

j'ai au moins trois frères et sœurs : j'ai strictement moins de trois frères ou sœur.

$\sqrt{2}$ n'est pas un rationnel : $\sqrt{2}$ est un rationnel

Montrons que $\sqrt{2}$ n'est pas un rationnel par l'absurde

1) Supposons que $\sqrt{2}$ est un rationnel Ça veut dire qu'on peut écrire cette racine sous la forme d'un quotient irréductible : $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ avec a et b deux entiers.
2) Ainsi $2 = \left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a^2}{b^2}$ et donc $a^2 = 2b^2$
3) Si un nombre a pour chiffre des unités u alors on peut l'écrire sous la forme $a = (10d + u)$ et donc son carré sera : $(10d + u)^2 = 100d^2 + 20du + u^2$ et donc le chiffre des unités du carré, autrement dit de a^2, sera le chiffre des unités de u^2 autrement dit du carré du chiffre des unités de a
4) voir ci-contre :
5) le ou les chiffres des unités possibles pour a^2 et $2b^2$ est 0
6) Le chiffre des unités de a sera nécessairement : 0 et donc a aura pour diviseurs 5 et 2
7) Le chiffre des unités de b sera nécessairement : 0 ou 5 et donc dans tous les cas b aura pour diviseurs 5
8) Ainsi $\frac{a}{b}$ est simplifiable par 5 ce qui contredit le fait que $\frac{a}{b}$ était une fraction irréductible
9) Conclusion : $\sqrt{2}$ ne peut être rationnel

chiffre des unités de	
a	a^2
0	0
1	1
2	4
3	9
4	6
5	5
6	6
7	9
8	4
9	1

chiffre des unités de	
b	$2b^2$
0	0
1	2
2	8
3	8
4	2
5	0
6	2
7	8
8	8
9	2