Chapitre 1

Equations et inéquations
du premier degré à une inconnue

I Equations

Définitions :

Une équation du premier degré est une égalité entre deux membres, qui est fausse la plus part du temps et qui n'est vraie qu'en des cas exceptionnels : quand la ou les inconnues prennent certaines valeurs que l'on appelle solution de l'équation.

Le degré d'une équation correspond à l'exposant maximal trouvé sur la ou les inconnues dans l'équation

Résoudre une équation c'est trouver toutes les solutions (si elles existent) de celle-ci.

Exemples :

$5x+3=9$ est une équation à une inconnue x de degré 1

$8y^2-3y-7=0$ est une équation à une inconnue y de degré 2

$(x-3)^2+(y+5)^2=7^2$ (autrement dit $x^2-6x+y^2+10y=15$)
est une équation a deux inconnues de degré 2

$(t-3)^2+5t+3=t^2$ est contre toute attente une équation de degré 1

Notion d'équivalence

Pour résoudre une équation on reformulera celle-ci plusieurs fois pour faire apparaitre la ou les solutions. Dans une reformulation on change la forme mais on conserve le sens autrement dit on a exactement les mêmes solutions, pas plus, pas moins.

Pour indiquer qu'une équation est une reformulation de la précédente, on pourrait écrire en début de ligne « est équivalent à » ou encore « si et seulement si » mais on préférera utiliser le symbole « ⇔ »

Ajouter une quantité de part et d'autre de l'égalité, ou en retrancher conserve l'égalité.

Multiplier ou diviser par une quantité **non nulle** conserve l'égalité.

Exemple :

$2x-3=5$ $\Leftrightarrow 2x-3+3=5+3$

$\Leftrightarrow 2x=8$

$\Leftrightarrow \frac{2x}{2}=\frac{8}{2}$

$\Leftrightarrow x=4$

Ainsi l'équation $2x-3=5$ a pour solution unique 4, ou encore $S=\{4\}$

Méthode / algorithme de résolution d'équations du premier degré à une inconnue:

$8x-5=81-3x$ $\Leftrightarrow 8x-5=81-3x$ on repère les opérations génantes

$\Leftrightarrow 8x-5+3x+5=81-3x+3x+5$ et on applique les opérations inverses

$\Leftrightarrow 11x=86$ On effectue

$\Leftrightarrow \frac{11x}{11}=\frac{86}{11}$ on divise à gauche et àa droite par la quantité de x

$\Leftrightarrow x=\frac{86}{11}$

Cas particulier

Si on est confronté à une équation du type : $ax+b=cx+d$ que se passe-t-il quand $b=d$, quand $a=c$ et quand on a les deux conditions précédentes réunies ?

Premier programme

Si on vous demande de résoudre une équation du type $ax + b = cx + d$ le résultat est assez prévisible, écrire un petit algorithme permettant de résoudre une telle équation.

Algorithme	Programme correspondant (calculatrice)
Afficher « $ax + b = cx + d$ »	Disp « AX+B=CX+D »
Récupérer a,b,c et d	Prompt A,B,C,D
Si $a \neq c$	If A≠C
alors	Then
afficher $\frac{d-b}{a-c}$	Disp (D-B)/(A-C) ▶Frac
Sinon :	Else
Si $b \neq d$	If B≠D
alors	Then
afficher « pas de solution »	Disp « PAS DE SOLUTION »
Sinon	Else
Afficher « tous les réels sont solutions »	Disp « TOUS LES REELS SONT SOL »
	End
	End

II Inéquations

A Bases

Définition : c'est la même que pour les équations sauf qu'il faut remplacer égalité par inégalité. On utilisera un des quatre symboles suivants entre les deux membres : $<, \leq, >, \geq$

Pour ceux qui ont un problème pour lire les symboles : $a < b$, Regardez le symbole, il est petit à gauche (du côté de a) et grand à droite (du côté de b) il se lit a est strictement plus petit que b. Le mot strictement permet de clarifier la situation et de préciser que ce n'est pas $\leq$ inférieur ou égal.

LA DIFFERENCE FONDAMENTALE

En utilisant les quatre opérations comme on pouvait le faire avec les équations on conserve l'inéquation SAUF si on multiplie ou on divise par un nombre strictement négatif, là L'ORDRE EST CHANGÉ.

Exemples : $2 < 5$ multiplions par -3 , on obtient : $-6 > -15$.

$-2x \geq 13 \Leftrightarrow \frac{-2x}{-2} \leq \frac{13}{-2} \Leftrightarrow x \leq -6{,}5$

B Gestion des solutions

Pour une équation, la situation est simple : quand la résolution se termine par $x = 5$, on sait qu'il y a une unique solution et qu'elle vaut 5, on peut noter $S = \{5\}$, l'accolade est comme un sac et elle contient un seul élément 5.

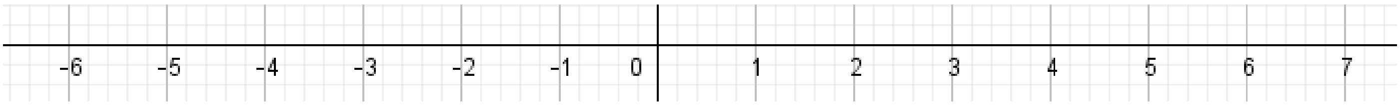
Pour les inéquations, ça se complique $x \leq 2$, veut dire que toutes les valeurs plus petites ou égales que 2 sont des solutions, ça en fait un paquet (une infinité pour être plus précis), et ça serait long de toutes les écrire dans une accolade donc il nous faut un autre moyen pour en rendre compte. Pour faire ça proprement on va faire un petit détour :

Approche graphique :

On va représenter les solutions de $x \leq 2$ sur un axe. Plus on va vers la droite plus les valeurs sont grandes, donc celles qui sont plus petites ou égales à 2 sont à gauche de 2, on va donc repasser cette zone en rouge. On fait un trait vertical en rouge en 2 pour bien préciser que ça s'arrête en 2.

Maintenant vient la partie où on veut clarifier que l'on parle de $x \leq 2$ et non de $x < 2$. Comme le rouge symbolise les solutions il faut ici qu'on indique que notre trait rouge fait partie des solutions, on lui fait de petits bras qui tendent vers la zone des solutions (ici à gauche)

Remarque :
dans le cas de $x < 2$, le 2 n'est pas une solution donc le trait qu'on a fait en 2 il est limite gênant, il faut vraiment préciser qu'en fait 2 n'est pas avec le reste du rouge, donc on lui fait des petits bras vers la zone non coloriée (la zone des valeurs qui ne sont pas solutions)



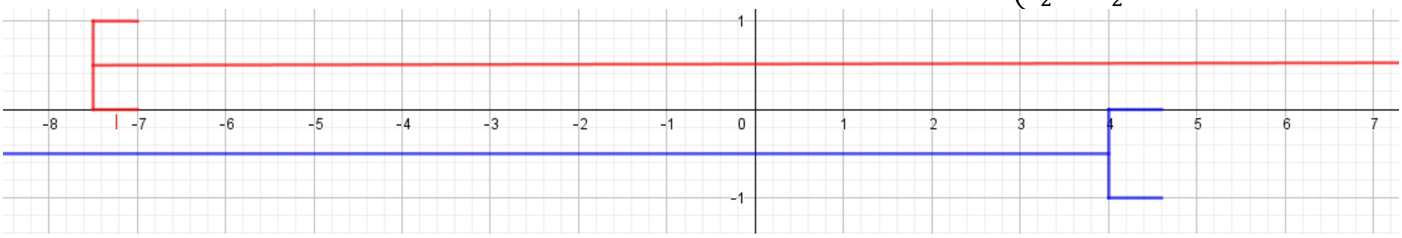
Ensemble de solutions
Pour revenir à $x \leq 2$, regardons la zone coloriée, elle s'arrête en 2, mais où commence-t-elle ? Sur le papier elle a un commencement mais si on dessinait un axe plus grand elle commencerait plus loin, en fait elle commence loin, très loin, en fait on ne peut pas faire plus loin vers la gauche que cet endroit, on le nommera $-\infty$.
Les solutions vont donc de $-\infty$ à 2, on va utiliser la notation intervalle pour finaliser ça, cette notation commence et termine par des crochets qui sont là pour symboliser l'éventuelle appartenance des bornes à l'ensemble que l'on considère. Pour le 2, pas de souci, on a juste à reporter ce que l'on voit sur la figure : on utilisera le crochet «] »
Le $-\infty$ n'est pas une valeur qu'on peut atteindre, c'est plus une direction qu'autre chose donc quand on dessinera les crochets vers l'extérieur, ce qui nous donnera : $S =]-\infty; 2]$
Remarque : si dans l'absolu les crochets vont tous les deux vers la gauche il faut faire attention le premier va vers l'extérieur de l'intervalle (symbolisant que la borne n'est pas dans l'intervalle) alors que l'autre pointe vers l'intérieur (symbolisant que la borne est une solution acceptable).

Bonus : lien avec la géométrie : droites, segments, demi droites.

C système d'inéquations
Définition : un système, généralement symbolisé par une accolade, est un regroupement d'équations ou d'inéquations. Les solutions d'un système sont les valeurs qui sont vraies pour toutes les équations/inéquations du système, on parle aussi d'intersection des différents ensembles de solutions.

Exemples :

$$\begin{cases} 5x - 3 < 17 \\ 2x - 11 \leq 4x + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x - 3 + 3 < 17 + 3 \\ 2x - 11 - 2x - 4 \leq 4x + 4 - 2x - 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x < 20 \\ -15 \leq 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{5x}{5} < \frac{20}{5} \\ \frac{-15}{2} \leq \frac{2x}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 4 \\ -7{,}5 \leq x \end{cases}$$



La partie commune de ces deux intervalles solutions se note : $]-\infty; 4[\cap [-7{,}5 ; +\infty[= [-7{,}5; 4[$
Le symbole $\cap$ se lit « inter » qui veut dire « intersection ».

Autres exemples à développer :

$\begin{cases} 3x - 5 < 2x + 11 \\ 7x - 11 \leq 4x + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \begin{cases} x < 15 \\ x \leq 5 \end{cases}$ $S =]-\infty; 5]$ si le dessin n'est généralement pas obligatoire il aide beaucoup.

$\begin{cases} 13x + 7 \leq 2x + 5 \\ 9x - 7 \geq 2x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -\frac{2}{11} \\ x \geq \frac{6}{7} \end{cases}$ là il n'y a aucune solution commune $S = \{\emptyset\}$ des fois on trouvera : $S = \emptyset$.

<u>III second degré et produits</u>
Propriété du produit nul
Si un produit est nul alors au moins un de ses facteurs l'est aussi. (la réciproque est aussi vraie)

Exemples :

$(2x-3)(5x+4)=0 \Leftrightarrow 2x-3=0$ ou $5x+4=0 \Leftrightarrow 2x=3$ ou $5x=-4 \Leftrightarrow x=\frac{3}{2}$ ou $x=-\frac{4}{5}$

$x^2-5x=0 \Leftrightarrow x(x-5)=0 \Leftrightarrow x=0$ ou $x-5=0 \Leftrightarrow x=0$ ou $x=5$

A équations du type $x^2 = a$

Propriété :

Soit l'équation $x^2=a$, si $a<0$ pas de solution
si $a=0$ une solution 0
et si $a>0$ et l'équation aura 2 solutions : $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$

Démonstration :

Si $a<0$, alors $x^2=a \Leftrightarrow x^2-a=0$ or comme $-a>0$ et $x^2 \geq 0$ on aura $x^2-a>0$ donc $x^2-a=0$ est impossible et donc $x^2=a$ n'a pas de solution

Si $a=0$, $x^2=a \Leftrightarrow x^2=0 \Leftrightarrow x \times x=0 \Leftrightarrow x=0$ ou $x=0$ (d'après la propriété du produit nul) $\Leftrightarrow x=0$

Si $a>0$, alors $a=\sqrt{a}^2$ donc $x^2=a \quad \Leftrightarrow x^2-\sqrt{a}^2=0 \Leftrightarrow (x-\sqrt{a})(x+\sqrt{a})=0$
$\Leftrightarrow (x-\sqrt{a})=0$ ou $(x+\sqrt{a})=0 \Leftrightarrow x=\sqrt{a}$ ou $x=-\sqrt{a}$

Exemples : ces équations sont très simples du coup elles servent surtout de marche pied pour s'occuper de cas un peu plus complexes comme ceux décrits dans les exemples qui suivent

$(2x-5)^2=25 \Leftrightarrow 2x-5=\sqrt{25}$ ou $2x-5=-\sqrt{25} \Leftrightarrow 2x=10$ ou $2x=0 \Leftrightarrow x=5$ ou $x=0$

$(7x+3)^2=-3$, comme $-3<0$ cette équation n'aura pas de solution

B Cas général

Si on a à faire à une équation ou une inéquation d'un degré supérieur à 1, il nous faut la factoriser jusqu'à obtenir soit un carré dans un membre et un nombre de l'autre
Soit un produit dans un membre et zéro de l'autre côté

Exemples

$x^2+6x+7=2 \Leftrightarrow x^2+6x+7+2=2+2 \Leftrightarrow (x+3)^2=4 \Leftrightarrow x+3=\sqrt{4}$ ou $x+3=-\sqrt{4}$
$\Leftrightarrow x+3=2$ ou $x+3=-2 \Leftrightarrow x=-1$ ou $x=-5$

$7x(x+3)=2x+6 \Leftrightarrow 7x(x+3)-2(x+3)=0 \Leftrightarrow (x+3)(7x-2)=0 \Leftrightarrow x+3=0$ ou $7x-2=0$
$\Leftrightarrow x=-3$ ou $7x=2 \Leftrightarrow x=-3$ ou $x=\frac{2}{7}$

C Cas des inéquations

Quand on obtient un produit (ou un quotient) comparé avec 0,
On étudiera le signe de chacun des facteurs pour déduire en quelle valeur ça s'annule et quels sont les signes de part et d'autre de cette valeur.
Dans le tableau on fera une ligne pour les valeurs de x puis une par facteur, et pour finir celle du produit (ou du quotient)
Pour la première ligne on reportera toutes les valeurs d'annulation obtenues durant la première phase, et sous chaque valeur on fera un trait vertical, une parois de colonne séparant l'avant et l'après la valeur considérée.
Pour chaque ligne on reportera les signes obtenus lors de la phase 1
Pour la ligne de conclusion : il nous faut utiliser la règle des signes pour les produits (et les quotients).

Exemple $(2x-3)(5-x)>0$

Phase 1 $\quad 2x-3 \geq 0 \Leftrightarrow 2x \geq 3 \Leftrightarrow x \geq \frac{3}{2}$

et $\quad 5-x \geq 0 \Leftrightarrow 5 \geq x$

x	$-\infty$		3/2		5		$+\infty$
$2x-3$		$-$	0	$+$		$+$	0
$5-x$		$+$		$+$	0	$-$	
$(2x-3)(5-x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Pour résoudre l'équation on doit dire quand est ce que le produit est strictement positif ; Ici ça n'arrive que strictement entre $\frac{3}{2}$ et 5. $\quad S=]\frac{3}{2};5[$

Mini fiche méthode 1 : fractions

Définition :
Les fractions sont les écritures de la forme $\frac{a}{b}$ avec a un entier que l'on nomme le numérateur et b un entier non nul que l'on nomme le dénominateur. Une fraction est une écriture représentant le résultat du quotient de a par b.

Egalité entre deux fractions
Deux fractions sont égales si l'on peut passer de l'une à l'autre en multipliant le numérateur et le dénominateur de l'une par le même nombre non nul pour obtenir l'autre fraction.

Exemple : $\frac{3}{5} = \frac{21}{35}$ en effet en multipliant par 7 le numérateur et le dénominateur de la première fraction j'obtiens la deuxième. On peut écrire $\frac{3}{5} = \frac{3\times7}{5\times7} = \frac{21}{35}$

Simplification de fractions
Simplifier une fraction c'est trouver d un diviseur commun au numérateur et au dénominateur différent de 1 et de diviser ceux-ci par d. $\frac{15}{33} = \frac{3\times5}{3\times11} = \frac{5}{11}$, on vient de simplifier par 3.
Il est recommandé de décomposer le numérateur et le dénominateur de la fraction en produit de facteurs, on pourra utiliser les critères de divisibilité suivants :
Par 2 : Si un nombre est pair alors il est divisible par deux
Par 3 : Si la somme des chiffres constituant un nombre est un multiple de trois, alors le nombre est aussi un multiple de trois
Par 5 : Si un nombre se termine par 0 ou 5 alors il est divisible par 5
Par 9 : Si la somme des chiffres constituant un nombre est un multiple de neuf, alors le nombre est aussi un multiple de neuf
Par 10 : Si un nombre se termine par 0, alors il est multiple de 10

Si on ne peut simplifier la fraction elle sera dite irréductible

Opérations entre les fractions
Le dénominateur d'une fraction correspond à une unité, et donc pour <u>ajouter ou soustraire</u> deux fractions il faut d'abord les mettre au même dénominateur.
Exemple $\frac{7}{12} + \frac{9}{10}$:

version bourrine $\frac{7}{12} + \frac{9}{10} = \frac{7\times10}{12\times10} + \frac{9\times12}{10\times12} = \frac{70}{120} + \frac{108}{120} = \frac{178}{120}$ résultat à simplifier

Version plus subtile : $\frac{7}{12} + \frac{9}{10} = \frac{7}{2\times2\times3} + \frac{9}{2\times5} = \frac{7\times5}{2\times2\times3\times5} + \frac{9\times2\times3}{2\times5\times2\times3} = \frac{35}{60} + \frac{54}{60} = \frac{89}{60}$

Pour <u>multiplier</u> deux fractions on multiplie les numérateurs ensemble et les dénominateurs ensemble.
Exemple : $\frac{14}{15} \times \frac{11}{21} = \frac{14\times11}{15\times21}$ et on profite pour simplifier $\frac{14\times11}{15\times21} = \frac{2\times7\times11}{3\times5\times3\times7} = \frac{2\times11}{3\times5\times3} = \frac{22}{45}$

<u>Diviser</u> par une quantité reviens à multiplier par son inverse. Pour obtenir l'inverse d'une fraction non nulle on permute numérateur et dénominateur.
Exemple : $\frac{3}{5} : \frac{7}{2} = \frac{3}{5} \times \frac{2}{7} = \frac{3\times2}{5\times7} = \frac{6}{35}$

Lien avec les entiers et les décimaux
Tout entier n peut être écrit sous forme de la fraction $\frac{n}{1}$
Tout nombre décimal d peut être écrit sous la forme d'une fraction dont le dénominateur est une puissance de 10.
Exemple : $3{,}57 = \frac{357}{100}$ et $0{,}0012 = \frac{12}{10000} = \frac{3}{2500}$

Mini fiche : Racine carrée

Définition :
La racine carrée d'un nombre positif a notée $\sqrt{a}$ est l'unique nombre positif dont le carré vaut a.
Ainsi $\sqrt{a}^2 = a$
La racine carrée d'un nombre négatif n'existe pas.

Remarque :
Si a est positif, $\sqrt{a}$ n'est pas le seul nombre dont le carré vaut a, il y a aussi $-\sqrt{a}$

Propriété :
$\sqrt{ab}$ la racine d'un produit de nombres positifs a et b vaut $\sqrt{a}\sqrt{b}$ de la même manière :
$\sqrt{\frac{a}{b}}$ la racine du quotient du positif a par le strictement positif b vaut $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$
Ça se traduit par (sous certaines conditions) la racine d'un produit est le produit des racines, la racine d'un quotient est le quotient des racines

Remarque :
Attention ça ne fonctionne pas pour les sommes et les différences, autrement dit si a et b sont deux réel non nuls $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$.

Propriété :
Si a est un nombre positif alors $\sqrt{a^2} = a$

Démonstration :
$\sqrt{a^2} = \sqrt{aa} = \sqrt{a}\sqrt{a}$ d'après la propriété précédente. Or $\sqrt{a}\sqrt{a} = \sqrt{a}^2 = a$ par définition, ainsi $\sqrt{a^2} = a$

Simplification d'une racine
Simplifier $\sqrt{a}$ avec a un entier c'est l'écrire sous la forme $b\sqrt{c}$ avec b et c des entiers

Exemple : Simplifier au maximum $\sqrt{3150}$

$\sqrt{3150} = \sqrt{2 \times 5 \times 5 \times 3 \times 3 \times 7}$ ………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

$= \sqrt{5^2 3^2 2 \times 7}$ ………………………………………………………………………………

$= \sqrt{5^2}\sqrt{3^2}\sqrt{2 \times 7}$ ………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

$= 5 \times 3 \times \sqrt{14} = 15\sqrt{14}$ ………………………………………………………………………………

Racines au dénominateur
De manière générale on veut éviter d'avoir des racines au dénominateur. Pour ce débarrasser d'elles deux cas de figure :
cas simple : $\frac{a}{\sqrt{b}}$ ou $\frac{a}{c\sqrt{b}}$ on multiplie en haut et en bas par la racine $\frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{a\sqrt{b}}{\sqrt{b}\sqrt{b}} = \frac{a\sqrt{b}}{b}$ et $\frac{a}{c\sqrt{b}} = \frac{a\sqrt{b}}{c\sqrt{b}\sqrt{b}} = \frac{a\sqrt{b}}{cb}$
deuxième cas : dénominateur mixte (somme ou différence de terme en racine de d'autres sans) : $\frac{a}{c+\sqrt{b}}$ ou $\frac{a}{c-\sqrt{b}}$
on multipliera en haut et en bas par la quantité conjuguée de l'expression, c'est-à-dire la même sauf qu'on change le signe entre les deux termes.

$\frac{a}{c+\sqrt{b}} = \frac{a(c+\sqrt{b})}{(c+\sqrt{b})(c-\sqrt{b})} = \frac{a(c+\sqrt{b})}{c^2-\sqrt{b}^2} = \frac{a(c+\sqrt{b})}{c^2-b}$ et $\frac{a}{c+\sqrt{b}} = \frac{a(c-\sqrt{b})}{(c-\sqrt{b})(c+\sqrt{b})} = \frac{a(c-\sqrt{b})}{c^2-\sqrt{b}^2} = \frac{a(c-\sqrt{b})}{c^2-b}$

www.dimension-k.com

Mini fiche : développement factorisation

Pour factoriser et développer on utilisera 6 formules

$\boldsymbol{k}(a+b) = \boldsymbol{k}a + \boldsymbol{k}b$

$\boldsymbol{k}(a-b) = \boldsymbol{k}a - \boldsymbol{k}b$

$(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$ pas utilisable pour factoriser, on utilisera plutôt les trois cas particulier de cette dernière appelés identitées remarquables :

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

Exemples de factorisation

utilisez le comme un exercice corrigé, et quand vous le faite ou que vous lisez la correction, verbaliser (dans votre tête ce qui a été fait de manière intelligible).

$3x + 3y \quad = 3(x+y)$

$3x - 15 \quad = 3x - 3 \times 5 = 3(x-5)$

$5 + 10x \quad = 5 \times 1 + 5 \times 2x = 5(1+2x)$

$25 - 49y^2 \quad = 5^2 - (7y)^2 = (5+7y)(5-7y)$

$16x^2 - 24x + 9 \quad = (4x)^2 - 2(4x)3 + 3^2 = (4x-3)^2$

$81y^2 + z^2 + 18yz \quad = (9x)^2 + 2(9x)1 + 1^2 = (9x+1)^2$

$28x^2 - 84x + 63 \quad = 7(4x^2 - 12x + 9) = 7((2x)^2 - 2(2x)3 + 3^2) = 7(2x-3)^2$

$300 - 27z^4 \quad = 3(100 - 9z^4) = 3(10^2 - (3z^2)^2) = 3(10 - 3z^2)(10 + 3z^2)$

$16x^4 - 625 \quad = ((4x)^2 - 25^2) = (4x^2 - 25)(4x^2 + 25) = ((2x)^2 - 5^2)(4x^2 + 25) = (2x-5)(2x+5)(4x^2+25)$

En vous inspirant de ce qui précède décrire un algorithme permettant de factoriser au maximum n'importe quelle expression.

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

x	$-\infty$ $+\infty$
$2x-3$	
$5-x$	
$(2x-3)(5-x)$	