LES FONCTIONS DE RÉFÉRENCE

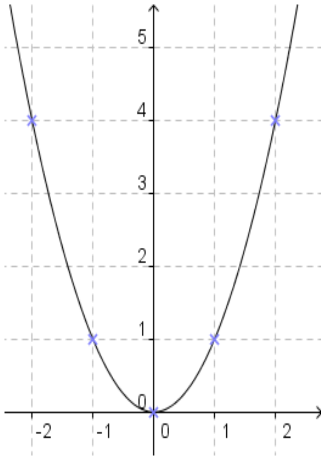
I. Fonction carré

1. Définition

La **fonction carré** f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$.

2. Représentation graphique

x	–2	–1	0	1	2
$f(x)$	4	1	0	1	4



Remarques :

- Le tableau de valeurs n'est pas un tableau de proportionnalité. La fonction carré n'est donc pas une fonction linéaire.

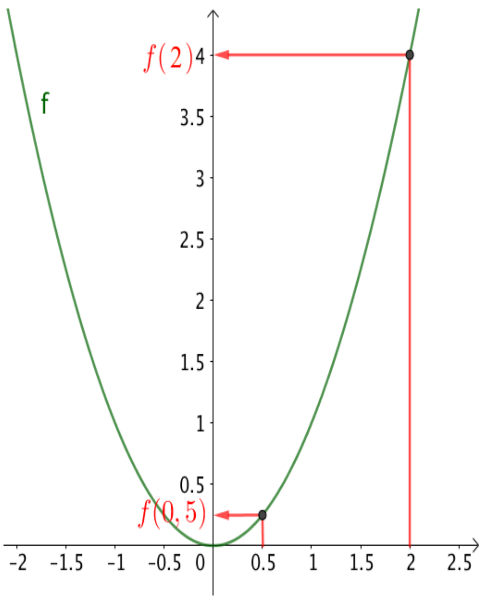
- Dans un repère (O, I, J), la courbe d'équation $y = x^2$ de la fonction carré est appelée une **parabole** de sommet O.

- Dans un repère orthogonal, la courbe d'équation $y = x^2$ de la fonction carré est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

Méthode : Comparer des images

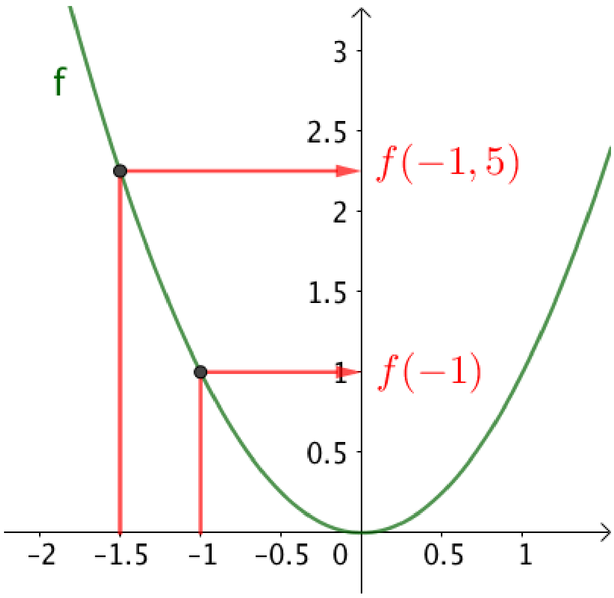
Vidéo https://youtu.be/-d3fE8d0YOc

On a représenté graphiquement la fonction carré f dans un repère.
1) a) Comparer graphiquement les nombres f(0,5) et f(2).
b) Même question avec f(–1,5) et f(–1).
2) Vérifier par calcul le résultat de la question 1b.



1) a) En traçant les images de 0,25 et de 2 par la fonction f, on constate que
$f(0{,}5) < f(2)$.

b) En traçant les images de –1,5 et de –1 par la fonction f, on constate que
$f(-1) < f(-1{,}5)$.



2) On a $f(x) = x^2$.
Ainsi : $f(-1{,}5) = (-1{,}5)^2 = 2{,}25$.
$f(-1) = (-1)^2 = 1$
On en déduit que $f(-1) < f(-1{,}5)$.

II. Fonction inverse

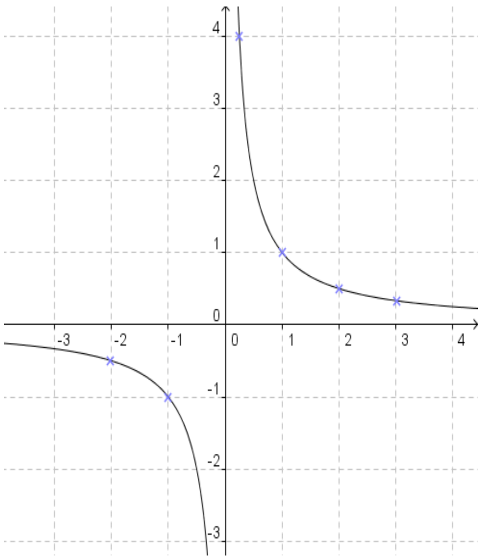
1. Définition

La **fonction inverse** f est définie sur $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ par $f(x) = \frac{1}{x}$.

Remarques :
- $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ désigne l'ensemble des nombres réels sauf 0, c'est-à-dire]–∞ ; 0 [U] 0 ; +∞ [. On peut aussi noter cet ensemble $\mathbb{R}^*$.
- La fonction inverse n'est pas définie en 0.

2. Représentation graphique

x	-2	-1	0,25	1	2	3
$f(x)$	$-0{,}5$	-1	4	1	0,5	$\frac{1}{3}$



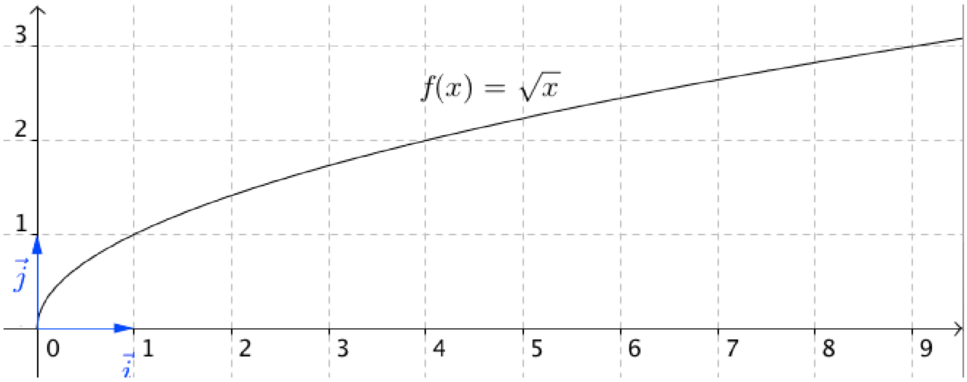
Remarques :
- Dans un repère (O, I, J), la courbe d'équation $y = \frac{1}{x}$ de la fonction inverse est une **hyperbole** de centre O.
- La courbe d'équation $y = \frac{1}{x}$ de la fonction inverse est symétrique par rapport à l'origine.

III. Fonction racine carrée

1. Définition

Définition : La **fonction racine carrée** est la fonction f définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x}$.

2. Représentation graphique

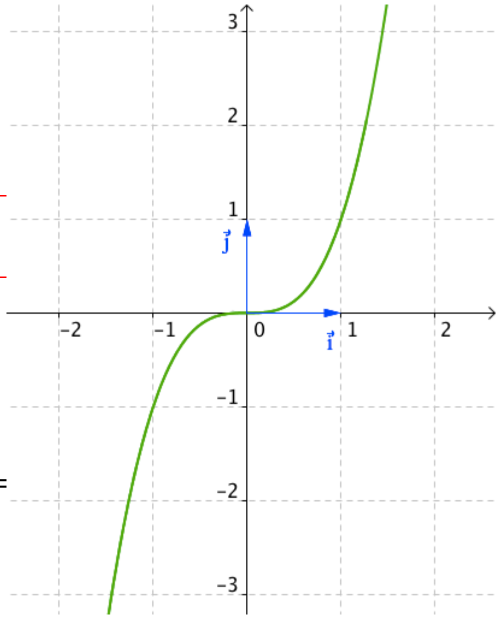


Remarque : La fonction racine carrée n'est pas définie pour des valeurs négatives.

IV. Fonction cube

1. Définition

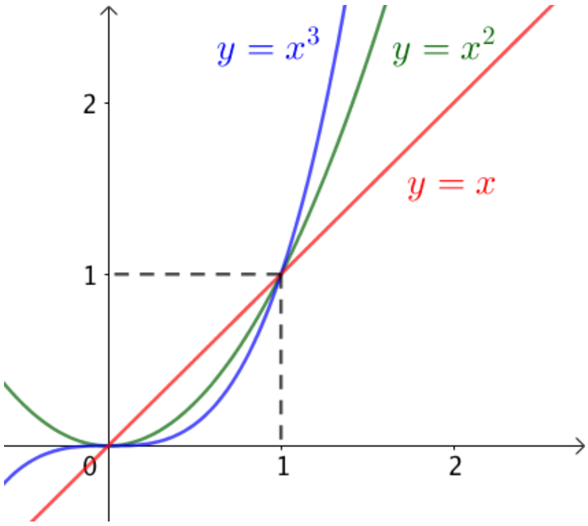
Définition : La **fonction cube** est la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$.



2. Représentation graphique

Remarque : Dans un repère orthogonal, la courbe d'équation $y = x^3$ de la fonction cube est symétrique par rapport au centre du repère.

3. Positions relatives des courbes d'équations : $y = x$, $y = x^2$ et $y = x^3$



Pour des valeurs positives de x, on a :

- Si $x \geq 1$: La courbe d'équation $y = x^3$ se trouve au-dessus de la courbe d'équation $y = x^2$ qui se trouve elle-même au-dessus de la courbe d'équation $y = x$.
- Si $0 \leq x \leq 1$: L'ordre précédent est inversé.

Démonstration au programme :

Vidéo https://youtu.be/op54acayjIQ

1er cas : si $x \geq 1$:

- Pour étudier les positions relatives des courbes d'équations $y = x$ et $y = x^2$, il suffit d'étudier le signe de $x^2 - x$.
Or, $x^2 - x = x(x-1) \geq 0$ car $x \geq 1$.
Donc, la courbe d'équation $y = x^2$ se trouve au-dessus de la courbe d'équation $y = x$.
- Pour étudier les positions relatives des courbes d'équations $y = x^2$ et $y = x^3$, il suffit d'étudier le signe de $x^3 - x^2$.
Or, $x^3 - x^2 = x^2(x-1) \geq 0$ car $x \geq 1$.
Donc la courbe d'équation $y = x^3$ se trouve au-dessus de la courbe d'équation $y = x^2$.

2e cas : si $0 \leq x \leq 1$:

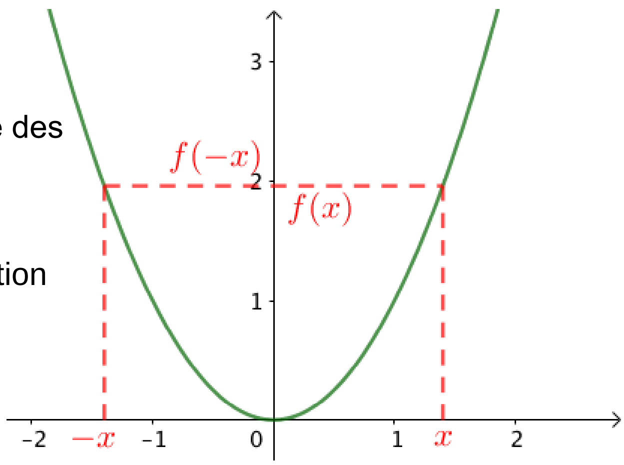
- Dans ce cas, $x^2 - x = x(x-1) \leq 0$ car $x \geq 0$ et $x - 1 \leq 0$.
Donc, la courbe d'équation $y = x^2$ se trouve en dessous de la courbe d'équation $y = x$.
- Et, $x^3 - x^2 = x^2(x-1) \leq 0$ car $x - 1 \leq 0$.
Donc la courbe d'équation $y = x^3$ se trouve en dessous de la courbe d'équation $y = x^2$.

V. Fonction paire, impaire

1. Fonction paire

Définition : Une fonction f est **paire** lorsque pour tout réel x de son ensemble de définition D, $-x$ appartient à D et $f(-x) = f(x)$.

Traduction géométrique :
Dans un repère orthogonal, la courbe représentative d'une fonction paire est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.



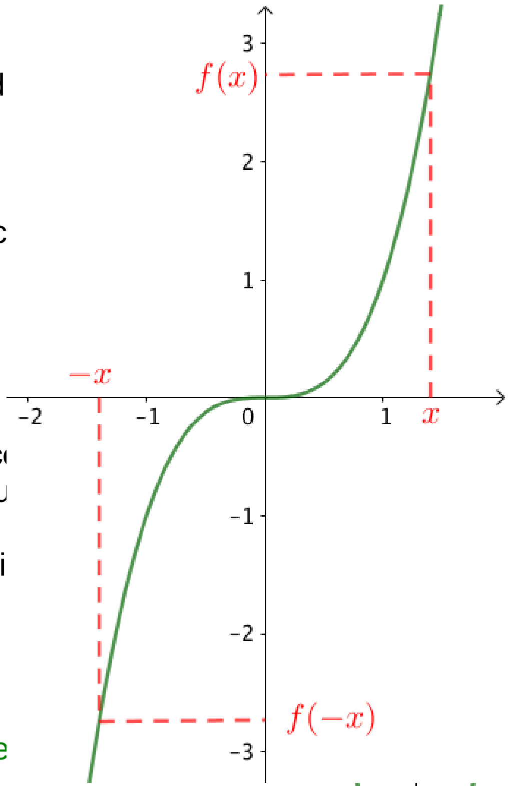
Exemple :
La fonction carré (représentée ci-contre) est une fonction paire.
En effet :
Si $f(x) = x^2$, on a : $f(-x) = (-x)^2 = x^2$
Donc $f(-x) = f(x)$.

Lorsqu'on trace la fonction carré, on constate que sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

2. Fonction impaire

Définitions : Une fonction f est **impaire** lorsque pour tout réel x de son ensemble de définition D, $-x$ appartient à D et $f(-x)=-f(x)$.

Traduction géométrique :
Dans un repère orthogonal, la courbe représentative d
fonction impaire est symétrique par rapport à l'origine.



Exemples :
- La fonction cube (représentée ci-contre) est une fonc
impaire.
En effet :
Si $f(x)=x^3$, on a : $f(-x)=(-x)^3=-x^3$
Donc $f(-x)=-f(x)$.

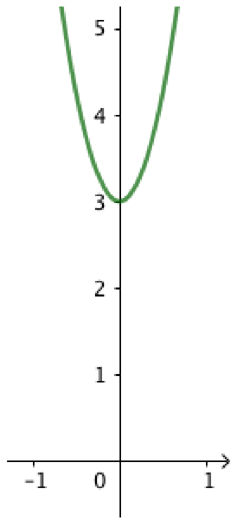
Lorsqu'on trace la fonction cube, on constate que sa c
représentative est symétrique par rapport à l'origine du

- On peut démontrer de la même manière que la foncti
est impaire.

Méthode : Étudier la parité d'une fonction (non exigible

Vidéo https://youtu.be/oheL-ZQYAy4

Démontrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=5x^2+3$ est paire.



Pour tout x réel, on a :
$f(-x)=5(-x)^2+3=5x^2+3$
On a donc $f(-x)=f(x)$
La fonction f est donc paire. Sa représentation graphique (ci-contre) est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.