Sujets

Exercice 1

Etudier la parité des fonctions suivantes :

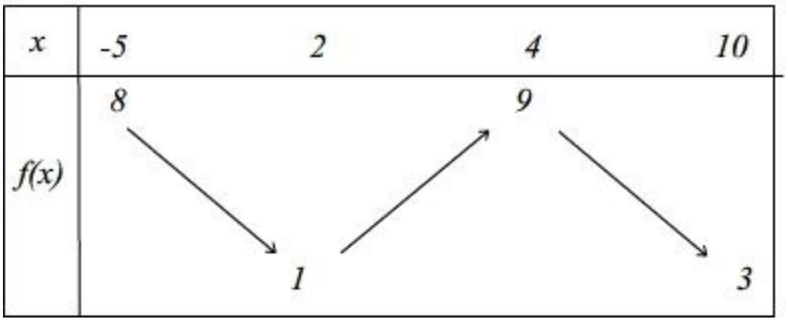
$f(x) = -2x + 9$
$g(x) = 7 + 2x^2$
$h(x) = 8x^3 - 7x$
$i(x) = \frac{7}{8+x^2}$
$j(x) = 8 + 3\sqrt{x}$
$k(x) = 8x - \frac{9}{x}$
$l(x) = \frac{8}{1-x^2}$
$m(x) = \frac{5x}{7+x^4}$

Exercice 2

1) Prouver que la fonction f qui a tout réel x associe le nombre $f(x) = 2x - 8$ est croissante sur $\mathbb{R}$ en utilisant la définition du cours.
2) Prouver que la fonction g qui a tout réel x associe le nombre $g(x) = -3x^2 + 1$ est croissante sur $]-\infty; 0]$ et décroissante sur $[0; +\infty[$ en utilisant la définition du cours.

Exercice 3

Soit f une fonction définie sur $[-5; 10]$ admettant le tableau de variations suivant.



Effectuer les comparaisons suivantes quand elles sont possibles après les avoir justifier.

a) $f(5)$ et $f(7)$
b) $f(2{,}5)$ et $f(3{,}5)$
c) $f(-5)$ et $f(-3)$
d) $f(-4)$ et $f(3)$
e) $f(-5)$ et $f(10)$

Sujets

Exercice 1

Etudier la parité des fonctions suivantes :

$f(x) = -2x + 9$ La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ donc $\forall x \in D_f, -x \in D_f$

$f(-x) = -2(-x) + 9 = 2x + 9$

Or $2x + 9 \neq f(x)$ et $2x + 9 \neq -f(x)$ la fonction n'est donc ni paire ni impaire.

Méthode rapide : quand on se doute que la fonction n'est ni paire ni impaire on peut le prouver à l'aide d'un contre exemple : on peut tester une valeur et son opposée. Par exemple : $f(1) = 7$ et $f(-1) = 11$ ainsi $f(-1)$ ne vaut ni $f(1)$ ni $-f(1)$ donc la fonction est ni paire ni impaire

$g(x) = 7 + 2x^2$ La fonction g est définie sur $\mathbb{R}$ donc $\forall x \in D_g, -x \in D_g$

$g(-x) = 7 + 2(-x)^2 = 7 + 2x^2 = g(x)$ la fonction est donc paire.

$h(x) = 8x^3 - 7x$ La fonction h est définie sur $\mathbb{R}$ donc $\forall x \in D_h, -x \in D_h$

$h(-x) = 8(-x)^3 - 7(-x) = -8x^3 + 7x = -(8x^3 - 7x) = -h(x)$ la fonction est donc impaire.

$i(x) = \frac{7}{8+x^2}$

$8 + x^2$ étant toujours strictement positive il n'y aura pas d'annulation au dénominateur et donc pas de valeur d'annulation.

La fonction i est définie sur $\mathbb{R}$ donc $\forall x \in D_i, -x \in D_i$

$i(-x) = \frac{7}{8+(-x)^2} = \frac{7}{8+x^2} = i(x)$ la fonction est donc paire.

$j(x) = 8 + 3\sqrt{x}$

La fonction j est définie sur $\mathbb{R}^+$ donc $\forall x \in D_j, -x \notin D_j$ et donc la fonction est ni paire ni impaire.

$k(x) = 8x - \frac{9}{x}$

La fonction j est définie sur $\mathbb{R}^*$ donc $\forall x \in D_k, -x \in D_k$

$k(-x) = 8(-x) - \frac{9}{(-x)} = -8x + \frac{9}{x} = -\left(8x - \frac{9}{x}\right) = -k(x)$ donc la fonction est impaire.

$l(x) = \frac{8}{1-x^2}$

Recherche du domaine de définition : $1 - x^2 = 0 \Leftrightarrow (1-x)(1+x) = 0 \Leftrightarrow 1 - x = 0$ ou $1 + x = 0 \Leftrightarrow 1 = x$ ou $x = -1$ ainsi $D_l = \mathbb{R} - \{-1; 1\}$, les deux valeurs interdites sont symétriques par rapport à zéro donc $\forall x \in D_l, -x \in D_l$

$l(-x) = \frac{8}{1-(-x)^2} = \frac{8}{1-x^2} = l(x)$ la fonction l est donc paire.

$m(x) = \frac{5x}{7+x^4}$

$7 + x^4$ étant toujours strictement positive il n'y aura pas d'annulation au dénominateur et donc pas de valeur d'annulation.

La fonction m est définie sur $\mathbb{R}$ donc $\forall x \in D_m, -x \in D_m$

$m(-x) = \frac{5(-x)}{7+(-x)^4} = \frac{-5x}{7+x^4} = -\frac{5x}{7+x^4} = -m(x)$ donc la fonction est impaire.

Exercice 2

1) Prouver que la fonction f qui a tout réel x associe le nombre $f(x) = 2x - 8$ est croissante sur R en utilisant la définition du cours.

Soit a et b deux réels tels que $a \leq b$ alors : $2a \leq 2b$ donc $2a - 8 \leq 2b - 8$ ainsi $f(a) \leq f(b)$ la fonction f conserve l'ordre elle est donc croissante.

2) Prouver que la fonction g qui a tout réel x associe le nombre $g(x) = -3x^2 + 1$ est croissante sur $]-\infty; 0]$ et décroissante sur $[0; +\infty[$ en utilisant la définition du cours.

a) Soit a et b deux réels tels que $a \leq b \leq 0$ alors :
Version 1 :
$0 \leq b^2 \leq a^2$ car la fonction carré est décroissante sur $]-\infty; 0]$
Donc $-3a^2 \leq -3b^2 \leq 0$ (la multiplication par un nombre négatif change l'ordre)
Et donc $-3a^2 + 1 \leq -3b^2 + 1 \leq 1$ ainsi $g(a) \leq g(b) \leq 1$ la fonction g conserve l'ordre.
Version 2 :
$a \leq b \leq 0$ donc $aa \geq ab \geq 0$ et $ab \geq bb \geq 0$ (car multiplier par un nombre négatif change l'ordre).
Ainsi $aa \geq ab \geq bb \geq 0$ et donc $a^2 \geq b^2 \geq 0$
On reprend la version 1 à partir de sa deuxième ligne.

b) Soit a et b deux réels tels que $0 \leq a \leq b$ alors :
Version 1 :
$0 \leq b^2 \leq a^2$ car la fonction carré est croissante sur $[0; +\infty[$
Donc $-3a^2 \geq -3b^2 \geq 0$ (la multiplication par un nombre négatif change l'ordre)
Et donc $-3a^2 + 1 \geq -3b^2 + 1 \geq 1$ ainsi $g(a) \geq g(b) \geq 1$ la fonction g conserve l'ordre.
Version 2 :
$0 \leq a \leq b$ donc $0 \leq aa \leq ab$ et $0 \leq ab \leq bb$ (car multiplier par un nombre positif conserve l'ordre).
Ainsi $0 \leq aa \leq ab \leq bb$ et donc $0 \leq a^2 \leq b^2$
On reprend la version 1 à partir de sa deuxième ligne.

Exercice 3
Soit f une fonction définie sur $[-5; 10]$ admettant le tableau de variations suivant.

x	-5		2		4		10
$f(x)$	8	$\searrow$	1	$\nearrow$	9	$\searrow$	3

Effectuer les comparaisons suivantes quand elles sont possibles après les avoir justifier.

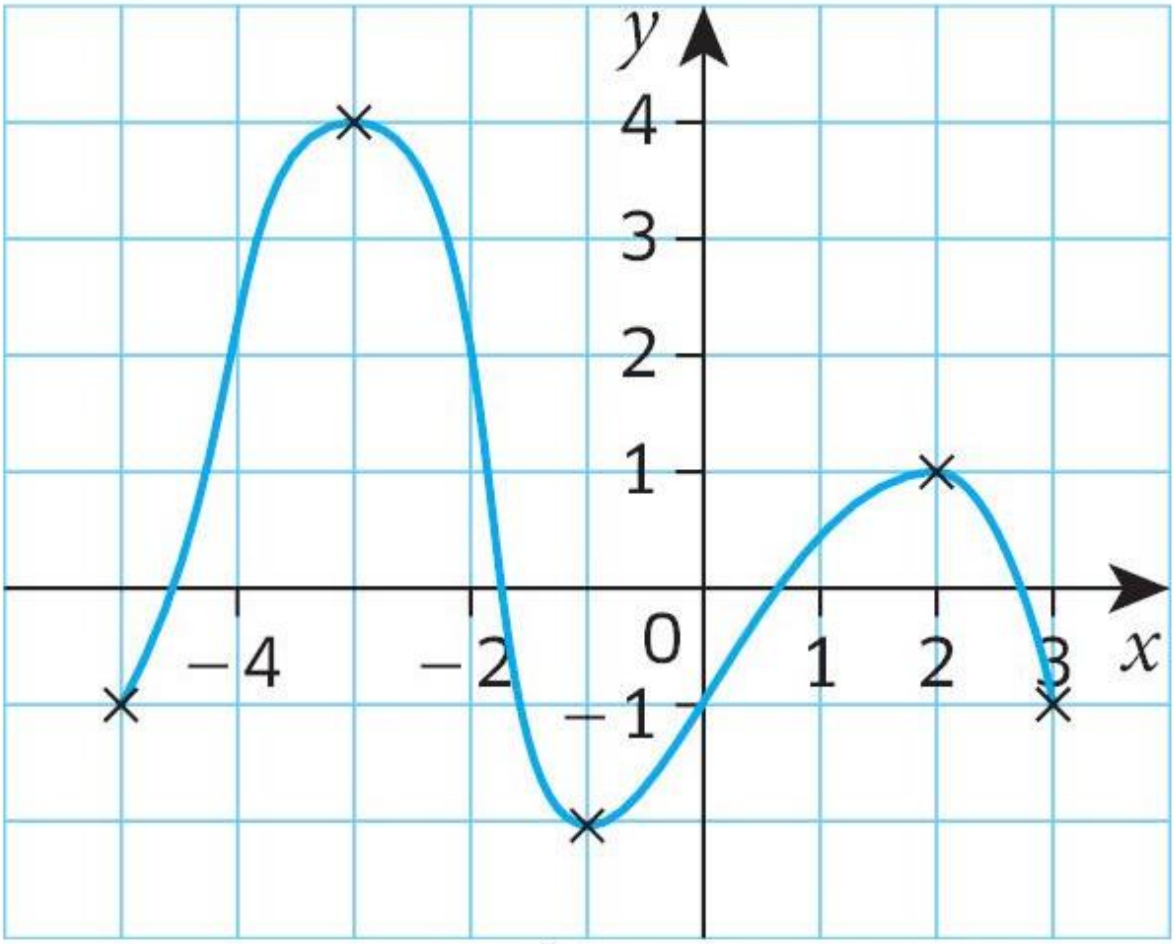
a) $f(5)$ et $f(7)$
5 et 7 sont dans $[4; 10]$ un intervalle dans lequel la fonction f est décroissante donc sur lequel la fonction change l'ordre or $5 < 7$ donc $f(5) > f(7)$

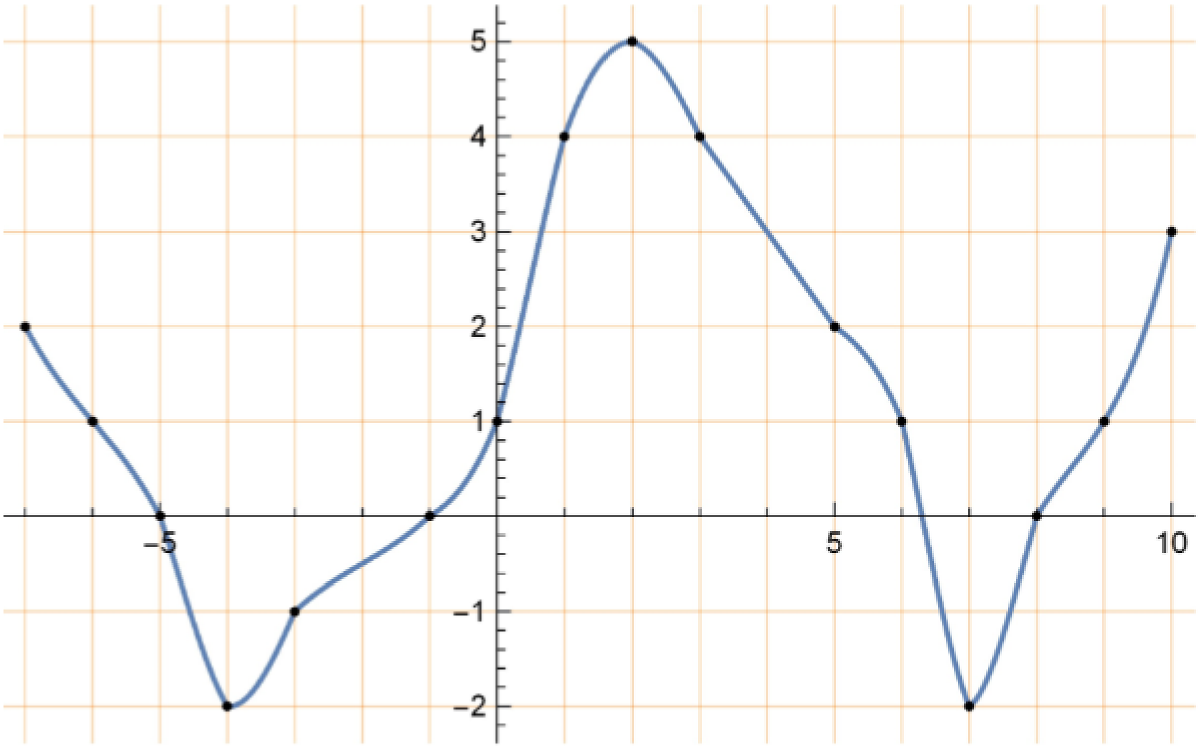
b) $f(2{,}5)$ et $f(3{,}5)$
2,5 et 3,5 sont dans $[2; 4]$ un intervalle dans lequel la fonction f est croissante donc sur lequel la fonction conserve l'ordre or $2{,}5 < 3{,}5$ donc $f(2{,}5) < f(3{,}5)$

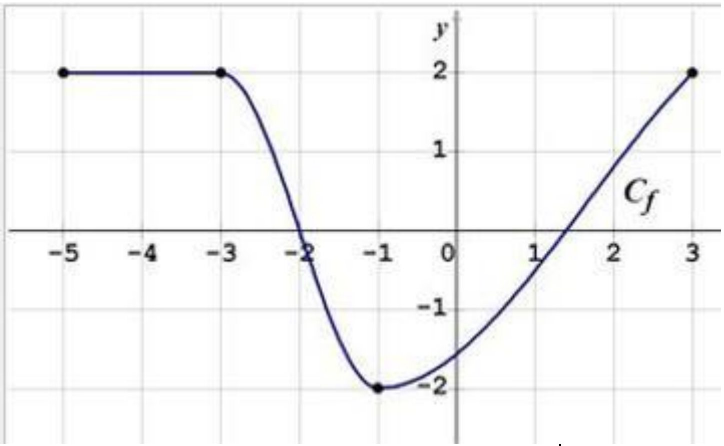
c) $f(-5)$ et $f(-3)$
-5 et -3 sont dans $[-5; 2]$ un intervalle dans lequel la fonction f est décroissante donc sur lequel la fonction change l'ordre or $-5 < -3$ donc $f(-5) > f(-3)$

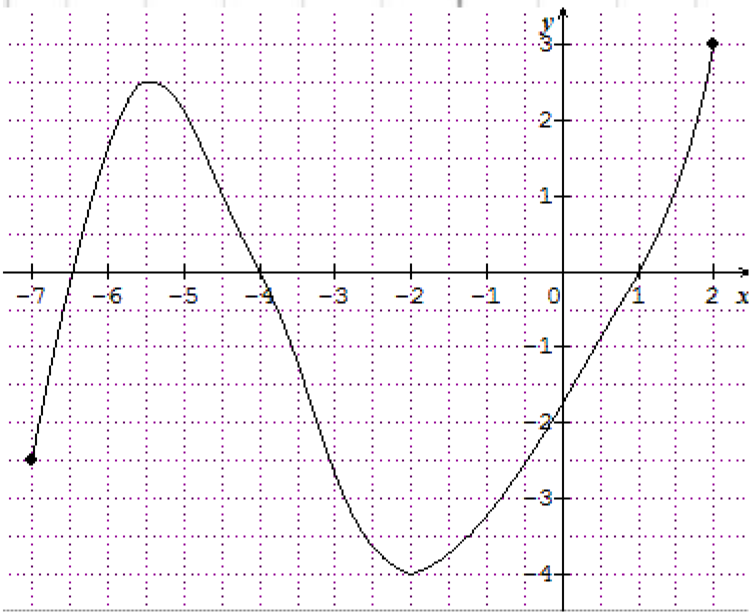
d) $f(-4)$ et $f(3)$
-4 et 3 ne sont pas dans un intervalle sur lequel la fonction est monotone donc on ne peut comparer les deux images avec la méthode utilisée précédemment. A priori il n'y a pas moyen de savoir qui est la plus grande image avec les informations disponibles

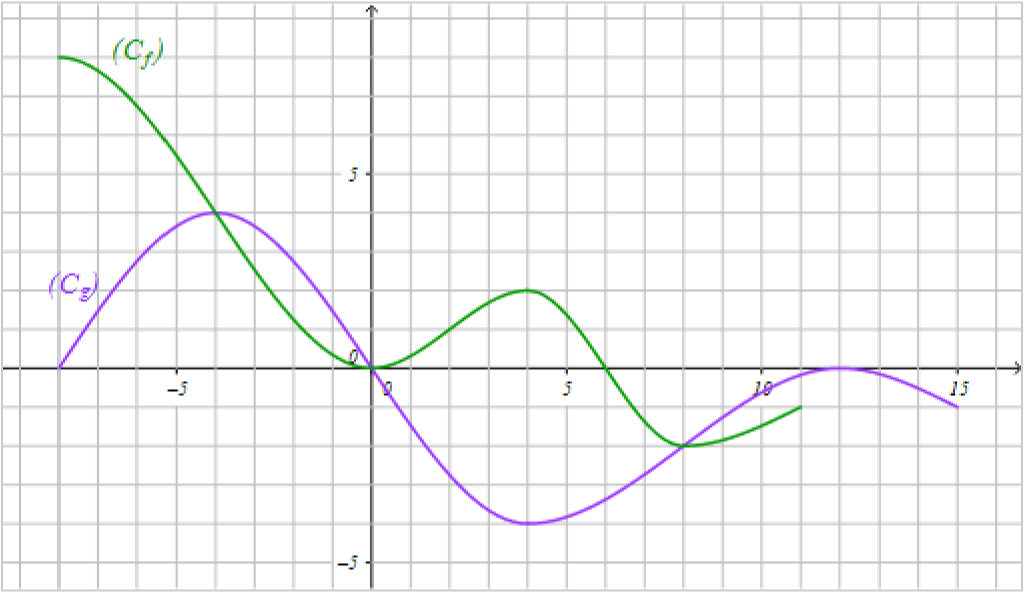
e) $f(-5)$ et $f(10)$
-5 et 10 ne sont pas dans un intervalle sur lequel la fonction est monotone donc on ne peut comparer les deux images avec la méthode utilisée précédemment. Cependant on sait que $f(-5) = 8$ et $f(10) = 3$ donc $f(-5) > f(10)$


y
4
3
2
1
0
−4
−2
1
2
3
x
−1


5
4
3
2
1
−1
−2
−5
5
10


y
2
1
C_f
−5
−4
−3
−2
−1
0
1
2
3
−1
−2


y
3
2
1
−7
−6
−5
−4
−3
−2
−1
0
1
2
x
−1
−2
−3
−4


(C_f)
(C_g)
5
0
−5
5
10
15
−5