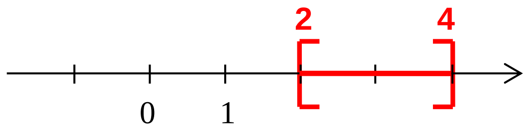
INTERVALLES ET INEQUATIONS

I. Intervalles de $\mathbb{R}$

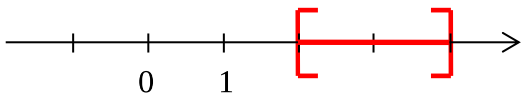
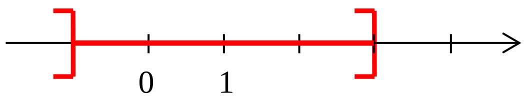
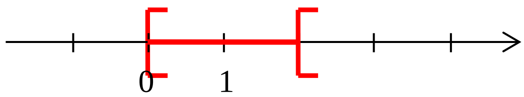
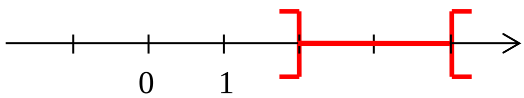
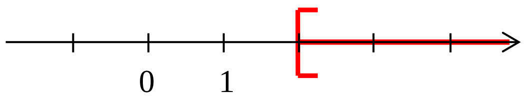
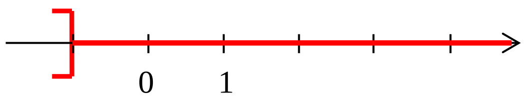
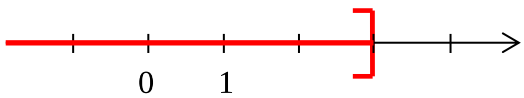
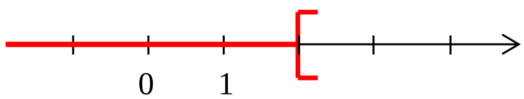
1. Notations :

L'ensemble de tous les nombres réels x tels que $2 \leq x \leq 4$ peut se représenter sur une droite graduée.

Cet ensemble est appelé un intervalle et se note : [2 ; 4]



Exemple :
L'ensemble de tous les nombres réels x tels que $-2 \leq x \leq 7$ se note : [–2 ; 7].
On a par exemple : $4 \in [-2 ; 7]$ $-1 \in [-2 ; 7]$ $8 \notin [-2 ; 7]$

Nombres réels x	Notation	Représentation
$2 \leq x \leq 4$	[2 ; 4]	
$-1 < x \leq 3$	]–1 ; 3]	
$0 \leq x < 2$	[0 ; 2[	
$2 < x < 4$	]2 ; 4[	
$x \geq 2$	[2 ; +∞[∞ désigne l'infini	
$x > -1$	]–1 ; +∞[	
$x \leq 3$	]–∞ ; 3]	
$x < 2$	]–∞ ; 2[	

Remarque : L'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ est un intervalle qui peut se noter $]-\infty\ ;\ +\infty[$.

2. Application aux inéquations

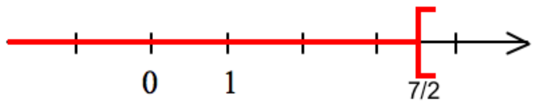
Une inéquation est une inégalité qui contient une inconnue x.
Résoudre une inéquation, c'est trouver toutes les valeurs de x qui vérifient cette inégalité. Il s'agit d'un ensemble de valeurs. Pour représenter l'ensemble des solutions, on utilise un intervalle. Les techniques de résolution des inéquations sont semblables à celles utilisées pour les équations.

Méthode : Donner les solutions d'une inéquation

Résoudre l'inéquation et donner les solutions sous forme d'un intervalle : $2x - 3 < 4$

$2x - 3 < 4 \quad \Leftrightarrow \quad 2x < 4 + 3$

$\Leftrightarrow \quad 2x < 7 \quad \Leftrightarrow \quad x < \dfrac{7}{2}$



L'ensemble des solutions est l'intervalle $\left]-\infty\ ;\ \frac{7}{2}\right[$.

3. Intervalle ouvert et intervalle fermé :

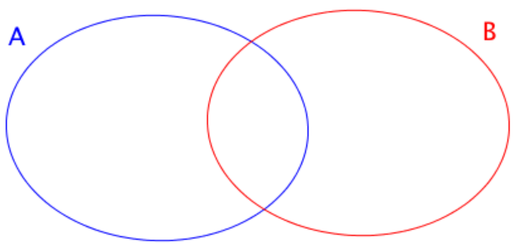
Définitions :
On dit qu'un intervalle est **fermé** si ses extrémités appartiennent à l'intervalle.
On dit qu'il est **ouvert** dans le cas contraire.

Exemples :

- L'intervalle $[-2\ ;\ 5]$ est un intervalle fermé. On a : $-2 \in [-2\ ;\ 5]$ et $5 \in [-2\ ;\ 5]$
- L'intervalle $]2\ ;\ 6[$ est un intervalle ouvert. On a : $2 \notin]2\ ;\ 6[$ et $6 \notin]2\ ;\ 6[$
- L'intervalle $]6\ ;\ +\infty[$ est également un intervalle ouvert.

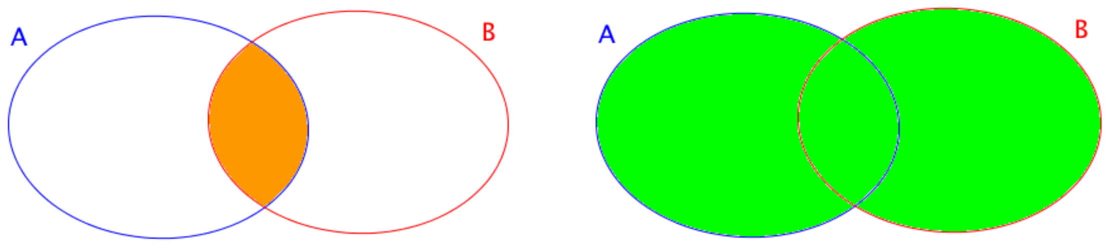
4. Intersections et unions d'intervalles :

Définitions :
- L'**intersection** de deux ensembles A et B est l'ensemble des éléments qui appartiennent à A **et** à B et se note A∩B.
- La **réunion** de deux ensembles A et B est l'ensemble des éléments qui appartiennent à A **ou** à B et se note A∪B.



$A \cap B$

$A \cup B$

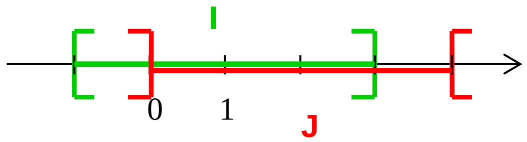


Méthode : Déterminer l'intersection et la réunion d'intervalles

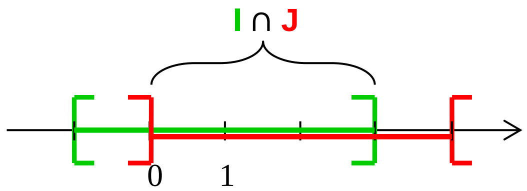
Dans les cas suivants, déterminer l'intersection et la réunion des intervalles I et J :

1) I = [–1 ; 3] et J =]0 ; 4[2) I =] –∞ ; –1] et J = [1 ; 4]

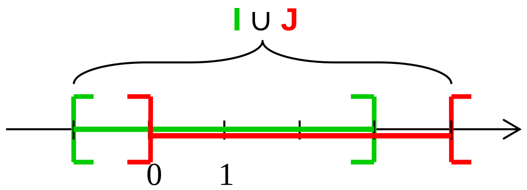
1) Pour visualiser les ensembles solutions, on peut représenter les intervalles **I** et **J** sur un même axe gradué.



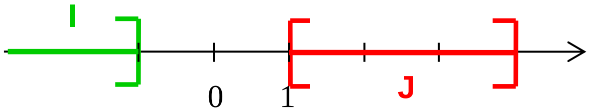
Les nombres de l'intersection des deux ensembles sont les nombres qui appartiennent à la fois aux deux ensembles. Il s'agit donc de la zone de l'axe gradué où les deux ensembles se superposent. Ainsi I ∩ J =]0 ; 3].



Les nombres de la réunion des deux ensembles sont les nombres qui appartiennent au moins à l'un des deux ensembles. Il s'agit donc de la zone de l'axe gradué marquée soit par l'intervalle I soit par l'intervalle J. Ainsi I ∪ J = [–1 ; 4[.



2)



Ici, les ensembles I et J n'ont pas de zone en commun. L'intersection des deux intervalles est vide.

Un ensemble qui ne contient aucun élément s'appelle l'**ensemble vide** et se note ∅.

On a alors : I ∩ J = ∅

I ∪ J =] –∞ ; –1] ∪ [1 ; 4]

II. Valeur absolue d'un réel

1. Définition

Exemples :
- La valeur absolue de –5 est égale à 5.
- La valeur absolue de 8 est égale à 8.

Définition : La **valeur absolue** d'un nombre A est égal au nombre A si A est positif, et au nombre –A si A est négatif.
La valeur absolue de A se note $|A|$.

Exemple : $|x-5| = \begin{cases} x-5, & si\ x \geq 5 \\ 5-x, & si\ x \leq 5 \end{cases}$

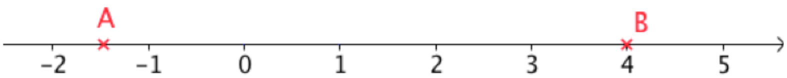
Propriétés : Soit x et y deux nombres réels.
1) $|x| \geq 0$ 2) $|-x| = |x|$ 3) $\sqrt{x^2} = |x|$ 4) $|x| = 0$ équivaut à $x = 0$
5) $|x| = |y|$ équivaut à $x = y$ ou $x = -y$
6) $|xy| = |x| \times |y|$ 7) $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$ pour $y \neq 0$

Exemples :
1) |–3| = 3 et |3| = 3 donc |–3| = |3| 2) $\sqrt{(-5)^2} = \sqrt{25} = 5$ et $|-5| = 5$ donc $\sqrt{(-5)^2} = |-5|$

2. Distance et valeur absolue

Propriété : Soit a et b deux nombres réels. Sur une droite graduée, la distance entre les points A et B d'abscisses respectives les nombres a et b est le nombre |a – b|.

Exemple :
Calculer la distance entre les nombres –1,5 et 4.
d(–1,5 ; 4) = |4 – (–1,5)| = 5,5



Propriété : Soit $a \in \mathbb{R}$.
Dire que x est tel que $|x-a| \leq r$ signifie que x appartient à l'intervalle $[a-r\,;a+r]$.

Exemple :
Soit un réel x tel que $|x-5| \leq 2$. Cela signifie que $x \in [5-2\,;5+2]$ soit $x \in [3\,;7]$.
Géométriquement, cela se traduit par le fait que la distance du point d'abscisse x au point d'abscisse 5 est inférieure ou égale à 2.