Triangles rectangles

Souvent on ne connait que partiellement la figure, et on veut trouver par le calcul des informations manquantes (longueurs de côtés, angles, …).

Pour arriver à notre but on pourra être amené à utiliser deux approches : la trigonométrie et le théorème de Pythagore.

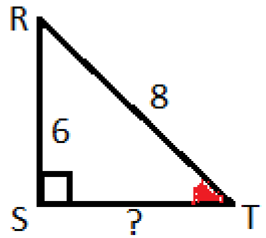
Si on vous demande la longueur d'un côté et que pour la déterminer vous avez les longueurs des deux autres vous utiliserez le théorème de Pythagore.

S'il y a des angles dans les données utiles ou dans la réponse attendue on utilisera les formules de trigonométrie.

Théorème de Pythagore

Dans un triangle rectangle le carré de la mesure de l'hypoténuse est égale à la somme des carrés des mesures

Exemples :



Determinons ST,

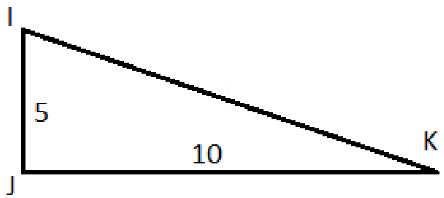
on veut une longueur et on va utiliser des longueurs pour notre calcul donc le théorème de Pythagore est adapté ici :

$RT^2 = RS^2 + ST^2$

Donc

$ST^2 = RT^2 - RS^2 = 8^2 - 6^2 = 64 - 36 = 28$

$ST = \sqrt{28} \approx 5{,}29$



Pour déterminer IK

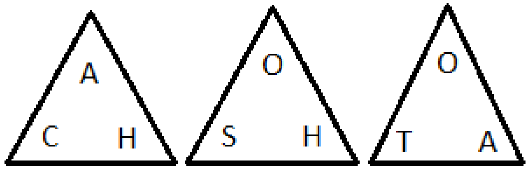
on veut une longueur et on va utiliser des longueurs pour notre calcul donc le théorème de Pythagore est adapté ici :

$IK^2 = IJ^2 + JK^2 = 5^2 + 10^2 = 125$

Donc $IK = \sqrt{125} \approx 11{,}180$

Trigonométrie

Tous les calculs se baseront sur les formules issues du diagramme suivant :



C : $Cos\ x$ A : Adjacent

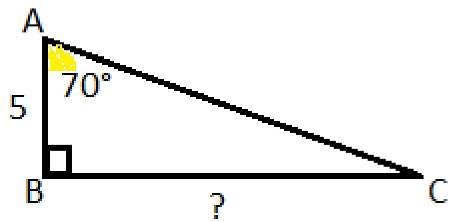
S : $Sin\ x$ O : Opposé

T : $Tan\ x$ H : Hypoténuse

On mettra son doigt sur la lettre correspondant à la valeur cherchée, puis on s'assurera que les deux lettres restantes font référence à des mesures connues, puis on interprétera (deux lettres au même niveau : produit, deux lettres superposées : division)

Exemples :

On veut déterminer BC le côté opposé, on pourrait utiliser le triangle 2 ou le triangle 3 du diagramme, comme on connait l'adjacent mais pas l'hypoténuse on prendra le troisième qui nous donne :



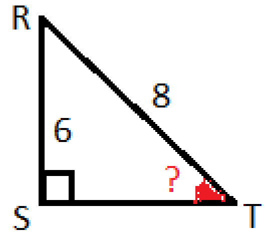
Dans ABC rectangle en B on a : $opposé = \tan(x)\ adjacent$

ainsi $BC = \tan(\widehat{BAC})\ AB = \tan(70)\ 5 \approx 13{,}74$

Dans RST rectangle en S on a : $\sin(x) = \frac{opposé}{hypoténuse}$

$\sin(\widehat{STR}) = \frac{RS}{RT} \Leftrightarrow \sin(\widehat{STR}) = \frac{6}{8}$

Donc $\widehat{STR} = \sin^{-1}\left(\frac{6}{8}\right) \approx 48{,}59°$

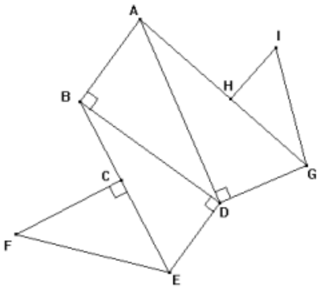


Bonus :

Si un triangle a un de ses côtés qui est un diamètre de son cercle circonscrit alors ce triangle est rectangle et le côté en question est son hypoténuse.

Exercices d’entrainement

Exercice 1



Dans le triangle rectangle BDA, on a : sin $\widehat{BDA}$ =

Dans le triangle rectangle DAG, on a : cos $\widehat{DAG}$ =

Dans le triangle rectangle BDA, on a : tan $\widehat{BAD}$ =

Dans le triangle rectangle BED, on a : cos $\widehat{BED}$ =

Dans le triangle rectangle BED, on a : tan $\widehat{DBE}$ =

Dans le triangle rectangle BDA, on a : cos $\widehat{BDA}$ =

Dans le triangle rectangle DGA, on a : sin $\widehat{DGA}$ =

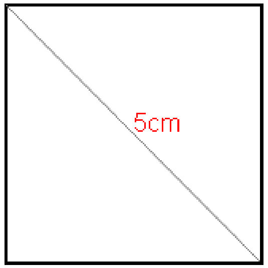
Exercice 2

Soit ABC rectangle en B avec AB = 5cm et AC= 10cm.

1) Déterminer $\widehat{BAC}$ puis en déduire $\widehat{BCA}$.
2) Déterminer BC.

Exercice 3

Quelle est l’aire d’un triangle de diagonale 5cm ?



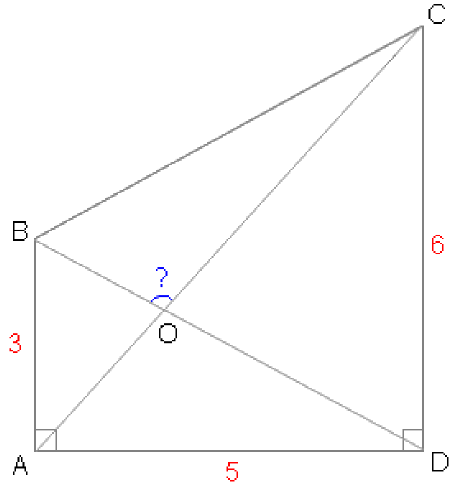
Exercice 4

Soit [IJ] un segment de longueur 8 cm. Sur le cercle (C) de diamètre [IJ], on considère un point K tel que IK = 3,5 cm.

1) Faire la figure.
2) Démontrer que le triangle IJK est rectangle.
3) Calculer JK (on donnera le résultat arrondi au mm).
4) Calculer à un degré prés la mesure de l’angle $\widehat{KIJ}$.

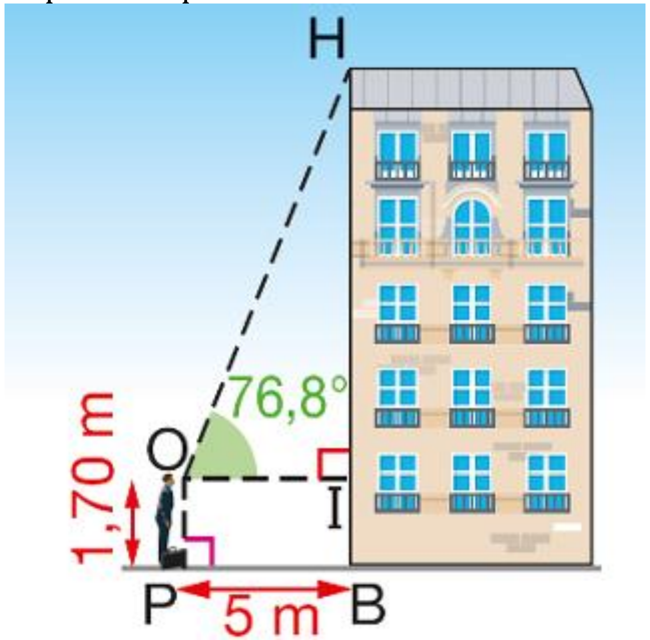
Exercice 5

Déterminer la mesure de l’angle $\widehat{BOC}$



Exercice 6

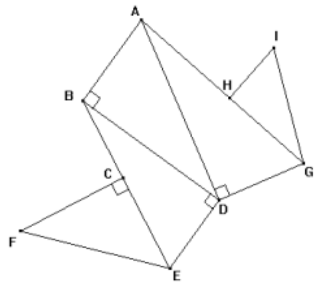
Pour mesurer la hauteur BH d’un immeuble, un géomètre procède ainsi : il se place à 5 m de l’immeuble et mesure l’angle $\widehat{IOH}$ I ; il trouve 76,8°. Le point O représente l’œil de l’observateur : OP=1,70 m.



1. Calculer la longueur HI, en m. *Donner une valeur approchée au centième près.*
2. Calculer alors une valeur approchée de la hauteur, en m, du bâtiment.

Correction

Exercice 1



Dans le triangle rectangle BDA, on a : $\sin \widehat{BDA} = \frac{opp}{hyp} = \frac{AB}{AD}$

Dans le triangle rectangle DAG, on a : $\cos \widehat{DAG} = \frac{adj}{hyp} = \frac{AD}{AG}$

Dans le triangle rectangle BDA, on a : $\tan \widehat{BAD} = \frac{opp}{adj} = \frac{BD}{AB}$

Dans le triangle rectangle BED, on a : $\cos \widehat{BED} = \frac{adj}{hyp} = \frac{ED}{EB}$

Dans le triangle rectangle BED, on a : $\tan \widehat{DBE} = \frac{opp}{adj} = \frac{DE}{DB}$

Dans le triangle rectangle BDA, on a : $\cos \widehat{BDA} = \frac{adj}{hyp} = \frac{DB}{DA}$

Dans le triangle rectangle DGA, on a : $\sin \widehat{DGA} = \frac{opp}{hyp} = \frac{DA}{AG}$

Exercice 2

Soit ABC rectangle en B avec AB = 5cm et AC= 10cm.

1) On veut déterminer $\widehat{BAC}$ qui est un angle donc on va utiliser les formules trigonométriques.

Dans ABC rectangle en B, [AB] et [AC] sont respectivement les côtés adjacents et hypoténuse, dans le diagramme on utilisera le premier triangle associé au cosinus. Ainsi $\cos(x) = \frac{adj}{hyp}$

Donc $\cos\left(\widehat{BAC}\right) = \frac{AB}{AC} = \frac{5}{10}$ et donc $\widehat{BAC} = \cos^{-1}(0,5) = 60°$

$\widehat{BCA} = 90 - \widehat{BAC} = 30°$ (car les angles aigus d'un triangle rectangle sont complémentaires).

2) Pour déterminer BC, même si on peut utiliser la trigonométrie avec l'angle $\widehat{BAC}$ fraichement trouvé, je pense qu'il vaut mieux passer par le théorème de Pythagore, en effet, si on a fait une erreur à la question précédente, en faisant de la trigonométrie on prend le risque de prolonger l'erreur.

Dans ABC rectangle en B le théorème de Pythagore nous donne :
$AC^2 = AB^2 + BC^2$ et donc $BC^2 = AC^2 - AB^2 = 10^2 - 5^2 = 75$
Ainsi $BC = \sqrt{75}$.

Exercice 3

Si on appelle ABCD le carré alors on sait que ABC est isocèle et rectangle, donc les deux angles aigus se partagent de manière équilibrée 90°, ils mesurent tous deux 45°.

Avec la trigonométrie
Dans ABC rectangle en B on aura $adjacent = \cos(x)\ hypoténuse$
Donc $AB = \cos\left(\widehat{BAC}\right) AC = \cos(45°)\,5$
L'aire sera donc de $AB^2 = (\cos(45°)\,5)^2 = 12{,}5cm^2$

Avec le théorème de Pythagore
Dans ABC rectangle en B on aura donc $AC^2 = AB^2 + BC^2$
Donc $AC^2 = 2AB^2$ donc $AB^2 = \frac{AC^2}{2} = \frac{25}{2}$ or l'aire de ABCD est AB^2 et donc elle est de 12,5 cm^2

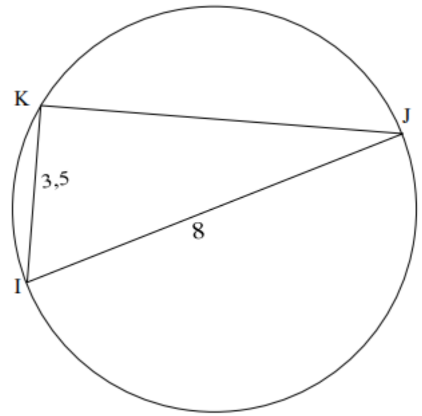
Exercice 4

2) Le point K est sur le cercle de diamètre [IJ] donc le triangle IJK et rectangle en K.

3) D'après le théorème de Pythagore dans le triangle IJK rectangle en K, on a :
$IJ^2 = IK^2 + KJ^2$
$8^2 = 3{,}5^2 + KJ^2$
$64 = 12{,}25 + KJ^2$
$KJ^2 = 64 - 12{,}25$
$KJ^2 = 51{,}75$

$KJ = \sqrt{51{,}75}$
$KJ \approx 7{,}2$ cm

4) Dans le triangle rectangle IJK, on a :
$\cos \widehat{KIJ} = \frac{adj}{hyp} = \frac{IK}{IJ} = \frac{3{,}5}{8}$
d'où $\widehat{KIJ} = \arccos\left(\frac{3{,}5}{8}\right) \approx 64°$



Exercice 5

Déterminons $\widehat{BDA}$ et $\widehat{DAC}$

Danse BAD rectangle en A on aura $\tan(x) = \frac{opp}{adj}$

Donc $\tan\left(\widehat{BDA}\right) = \frac{BA}{AD} = \frac{3}{5}$ et donc :

$\widehat{BDA} = \tan^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)$

Danse CAD rectangle en D on aura $\tan(x) = \frac{opp}{adj}$

Donc $\tan\left(\widehat{DAC}\right) = \frac{CD}{AD} = \frac{6}{5}$ et donc :

$\widehat{DAC} = \tan^{-1}\left(\frac{6}{5}\right)$

Dans le triangle OAD on connait les angles $\widehat{DAO} = \widehat{DAC}$ et $\widehat{ODA} = \widehat{BDA}$

Or la somme des angles d'un triangle doit faire $180°$ et donc :

$$\begin{aligned} \widehat{DOA} &= 180° - \widehat{DAO} - \widehat{ODA} \\ &= 180 - \tan^{-1}\left(\frac{3}{5}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{6}{5}\right) \approx 98{,}84° \end{aligned}$$

Exercice 6

Correction vidéo

Vous pouvez utiliser le lien :

https://www.youtube.com/watch?v=45dF2L0VtSk

Ou scanner le QR code suivant :