Correction de l'exercice à terminer à la maison

Enoncé (exercice 7B3 un peu modifié) On ne connaît une fonction f que par son tableau de variation.

1) Pour chacune de ces affirmations dire si elle est vraie ou fausse, en justifiant la réponse :

a. $f(-3) = 4$ b. $f(1) \geq f(3)$

c. $f(-1)$ est positif

e. $f(1) > 3$ f. $f(5)$ est négatif

g. $f(-3) < f(-2)$

h. Si $x \in [0\,;\,6]$, $f(x) \geq -3$

2) comparer $f(-1)$ et $f(1)$.

3) montrer que -3 est le minimum de f sur $[0; 6]$

x	-4		-2		0		4		6
$f(x)$	1	↘	0	↗	3	↘	-3	↗	-1

Correction

a. $-3 \in [-4; -2]$, or f est décroissante sur cet intervalle (elle change l'ordre) donc comme $-4 < -3 < -2$ on aura $f(-4) \geq f(-3) \geq f(-2)$

On aura donc : $1 \geq f(-3) \geq 0$ donc $f(-3) \in [0; 1]$ (attention à l'ordre des bornes)

4 n'étant pas dans cet intervalle on ne peut avoir $f(-3) = 4$ la proposition est donc fausse. **FAUX**

Remarque : Une démonstration est généralement une suite logique / une information implique une autre qui implique une autre … , on utilise généralement « donc » à chaque implication.
Si on doit aller chercher une information supplémentaire pour pouvoir conclure, elle sera introduite avec « or ».

b. 1 et 3 sont dans $[0; 4]$ intervalle sur lequel la fonction f est décroissante et donc sur lequel elle change l'ordre, ainsi comme $0 < 1 < 3 < 4$ on aura $f(0) \geq f(1) \geq f(3) \geq f(4)$

Ainsi $f(1) \geq f(3)$, la proposition est donc vraie. **VRAI**

c. -1 est dans $[-2; 0]$, intervalle sur lequel la fonction f est croissante (conserve l'ordre), ainsi comme $-2 < -1$ on aura $f(-2) \leq f(-1) \Rightarrow 0 \leq f(-1)$ ainsi $f(-1)$ est positif (pris au sens large) **VRAI**

d.

e. 1 est dans $[0; 4]$ intervalle sur lequel la fonction f est décroissante et donc sur lequel elle change l'ordre, ainsi come $0 < 1 < 4$ on aura $f(0) \geq f(1) \geq f(4)$ donc $3 \geq f(1) \geq -3$.

Comme $f(1) \leq 3$ on ne peut avoir $f(1) > 3$. **FAUX**

f. 5 est dans $[4; 6]$ intervalle sur lequel la fonction f est croissante (conserve l'ordre) et donc comme $4 < 5 < 6$ on aura $f(4) \leq f(5) \leq f(6)$ ainsi on aura $-3 \leq f(5) \leq -1$

Comme $f(5)$ est inférieur ou égal à -1 il ne peut être positif **FAUX**

g. -3 et -2 sont dans $[-4; -2]$ intervalle sur lequel f est décroissante (change l'ordre) et donc comme $-4 < -3 < -2$ on aura $f(-4) \geq f(-3) \geq f(-2)$ ainsi on a $f(-3) \geq f(-2)$ ce qui est le contraire de ce que l'on cherchait à avoir. **FAUX**

h. f n'est pas monotone, on va donc raisonner par disjonction des cas (on traite le problème par morceaux)

Si x appartient à $[0; 4]$ intervalle sur lequel la fonction f est décroissante et donc sur lequel elle change l'ordre, alors comme $0 < x < 4$ on aura $f(0) \geq f(x) \geq f(4)$ donc $3 \geq f(x) \geq -3$

Si x appartient à $[4; 6]$ intervalle sur lequel la fonction f est croissante (conserve l'ordre) alors comme $4 < x < 6$ on aura $f(4) \leq f(x) \leq f(6)$ ainsi on aura $-3 \leq f(x)$

Quand x est dans $[0; 6]$, il est soit dans $[0; 4]$ soit dans $[4; 6]$. Dans les deux cas $f(x) \geq -3$ donc **VRAI**

2) f n'est pas monotone entre -1 et 1 donc à priori je ne peux utiliser les informations sur les variations pour comparer les images de ces deux valeurs.

3) Une fonction admet un minimum m sur un intervalle I, si elle atteint au moins une fois la valeur m sur I et si pour tout x de I on a $f(x) \geq m$.

La réponse à cette question est une du **h.** auquel on rajoutera « comme $f(4) = -3$ alors la valeur -3 est atteinte au moins une fois. Les deux conditions étant remplies on aura -3 minimum de f sur $I = [0; 6]$. »