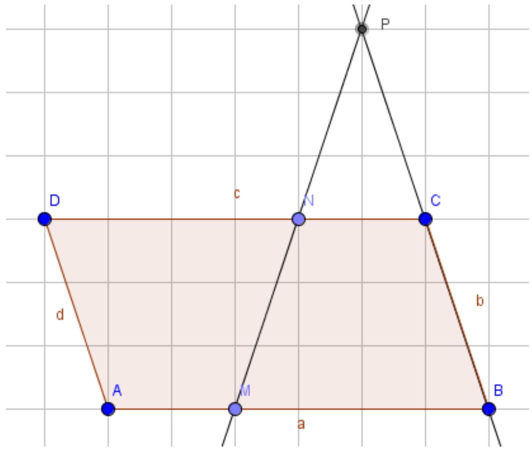
Correction du devoir maison

Exercice 93P192

Thalès



1) Je sais que M est sur [AB] et que $AM = \frac{1}{3}AB$ donc $MB = \frac{2}{3}AB$

De plus on sait que $CN = \frac{1}{3}DC$ or ABCD étant un parallélogramme on aura $DC = AB$ et donc $CN = \frac{1}{3}AB$ et donc on peut conclure que $MB = 2CN$

2) dans le triangle BMP coupé par la droite (NC) parallèle à (MB) le théorème de thalès nous donne :

$\frac{MP}{NP} = \frac{BP}{CP} = \frac{MB}{NC}$ or $MB = 2CN$ donc $\frac{MP}{NP} = \frac{BP}{CP} = 2$.

3) On sait que $\frac{MP}{NP} = 2$ donc MP=2NP et vu que les trois points sont alignés et dans le bon ordre on peut dire que N est le milieu de [MP].

Calcul vectoriel

1)

Comme M' est le symétrique de M par rapport à N on a N qui sera le milieu de [MM'] et donc $\overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{MN}$

$\overrightarrow{BM'} = \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{BM} + 2\overrightarrow{MN}$

2)

a) $\overrightarrow{BM'} = \overrightarrow{BM} + 2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{BM} + 2\left(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CN}\right) = \overrightarrow{BM} + 2\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{BC} + 2\overrightarrow{CN} = \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{BC} + 2\overrightarrow{CN}$

or d'après les hypothèses M est sur [AB] $AM = \frac{1}{3}AB$ donc $BM = \frac{2}{3}AB$ et donc $\overrightarrow{MB} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$

je sais aussi que N est sur [DC] et $CN = \frac{1}{3}DC$ donc $\overrightarrow{CN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BA}$ et donc $2\overrightarrow{CN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BA}$

et donc $\overrightarrow{BM'} = \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{BC} + 2\overrightarrow{CN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BC} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BA} = \frac{2}{3}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA}\right) + 2\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{BC}$ CQFD

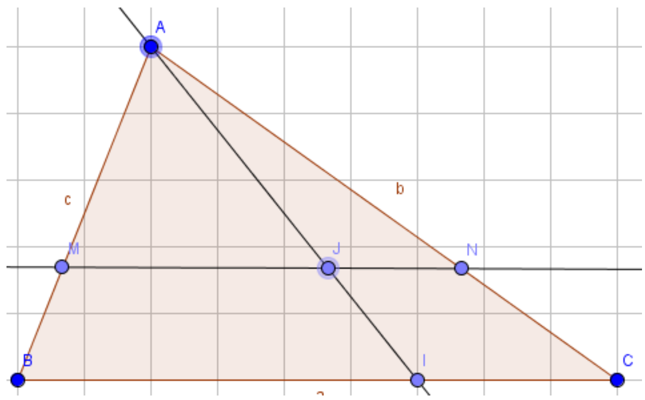
b) $\overrightarrow{BM'} = 2\overrightarrow{BC}$ donc $\overrightarrow{BM'}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires et donc (BM') // (BC) or ces deux droites ont le point B en commun, elles sont donc confondues et donc B, M' et C sont alignés autrement dit M' est sur la droite (BC)

2)

On sait que M' est le symétrique de M par rapport à N donc M' est sur (MN) de plus on a prouvé à la question précédente que M' est sur la droite (BC) et donc M' est le point d'intersection entre ces deux droites non confondues, or ce point a déjà un nom P , ainsi M' et P sont confondus.

Comme N est le milieu de de [MM']} et que M' et P sont confondus on peut dire que N est le milieu de [MP].

94 P 193



A Première méthode

1)a) Comme le point N est sur [AC] les droites (AN) et (AC) sont confondues et donc parallèles et donc les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AN}$ sont colinéaires donc il existe un réel k tel que $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AN}$

b) Comme la droite (MN) est parallèle à (BC) le théorème de Thalès nous permet de dire que $k = \frac{AC}{AN} = \frac{AB}{AM}$ et donc $AB = kAM$, vu l'alignement des points et leur ordre on peut en déduire $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AM}$

c) et donc par soustraction : $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AM} - k\overrightarrow{AN}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} = k\overrightarrow{AM} + k\overrightarrow{NA} \Leftrightarrow \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = k\left(\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{AM}\right) \Leftrightarrow \overrightarrow{CB} = k\overrightarrow{NM}$

2) d'après l'énoncé on peut déduire que $\overrightarrow{CI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CB}$ et $\overrightarrow{NJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{NM}$

or comme $\overrightarrow{CB} = k\overrightarrow{NM}$ on aura aussi : $\frac{1}{3}\overrightarrow{CB} = k\frac{1}{3}\overrightarrow{NM}$ et donc $\overrightarrow{CI} = k\overrightarrow{NJ}$

or $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AN}$ donc $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CI} = k\overrightarrow{AN} + k\overrightarrow{NJ}$ et donc $\overrightarrow{AI} = k\overrightarrow{AJ}$

B Une deuxième méthode

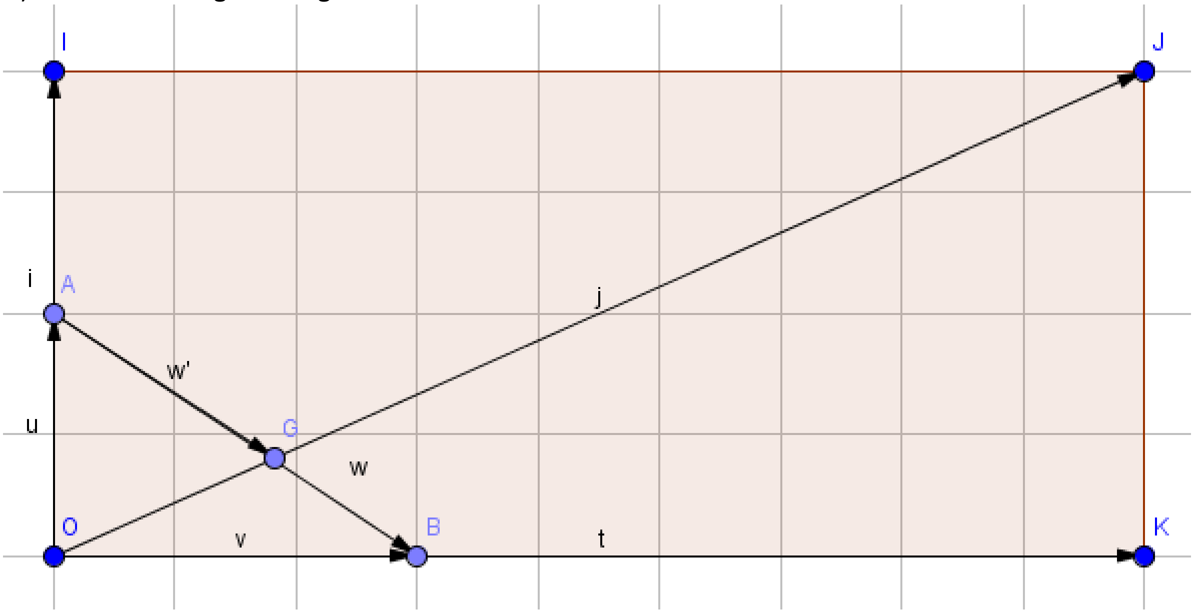
1a) Dans AIC coupé par la droite (NJ) parallèle au côté [IC] le théorème de Thalès donne $\frac{AC}{AN} = \frac{AI'}{AJ} = \frac{CI'}{NJ}$ donc $\frac{CI'}{NJ} = a$

Dans ABC coupé par la droite (NM) parallèle au côté [BC] le théorème de Thalès donne $\frac{AC}{AN} = \frac{AB}{AM} = \frac{BC}{NM}$ donc $\frac{BC}{NM} = a$

b) $CI = \frac{1}{3}CB$ et $NJ = \frac{1}{3}NM$ et donc $\frac{CI}{NJ} = \frac{\frac{1}{3}CB}{\frac{1}{3}NM} = \frac{CB}{NM} = a$

2a) on a donc $CI = a\,NJ$ et $CI' = a\,NJ$ et donc $CI = CI'$.
b) I et I' sont sur le même segment [BC] à la même distance du point C et du même côté de celui-ci donc ces points sont confondus.

95P193
A) À l'aide d'un logiciel de géométrie



Les points O J et G semblent alignés

B) Une première démonstration
1)
$\overrightarrow{OJ} = \overrightarrow{OI} + \overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{OI} + \overrightarrow{OK}$ (OIJK étant un rectangle c'est aussi un parallélogramme et donc $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{OK}$).
2)
$\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AG} = \overrightarrow{OA} + \frac{3}{5}\overrightarrow{AB}$
$\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OA} + \frac{3}{5}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OA} + \frac{3}{5}\left(\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}\right) = \overrightarrow{OA} + \frac{3}{5}\overrightarrow{AO} + \frac{3}{5}\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} - \frac{3}{5}\overrightarrow{OA} + \frac{3}{5}\overrightarrow{OB} = \frac{2}{5}\overrightarrow{OA} + \frac{3}{5}\overrightarrow{OB}$
3)
$\overrightarrow{OG} = \frac{2}{5}\overrightarrow{OA} + \frac{3}{5}\overrightarrow{OB}$ or $\overrightarrow{OA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OI}$ et $\overrightarrow{OB} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OK} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OJ} - \overrightarrow{OI}\right) = \frac{1}{3}\overrightarrow{OJ} - \frac{1}{3}\overrightarrow{OI}$
Ainsi
$\overrightarrow{OG} = \frac{2}{5} \times \frac{1}{2}\overrightarrow{OI} + \frac{3}{5}\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{OJ} - \frac{1}{3}\overrightarrow{OI}\right) = \frac{1}{5}\overrightarrow{OI} + \frac{1}{5}\overrightarrow{OJ} - \frac{1}{5}\overrightarrow{OI} = \frac{1}{5}\overrightarrow{OJ}$
Les deux droites (OG) et (OI) ont un point commun et sont parallèles et donc elles sont confondues et les points sont alignés.

C) jdans le repère (O,I,K)
On a :
$\overrightarrow{OO} = 0\overrightarrow{OI} + 0\overrightarrow{OK}$ donc O(0 ;0), $\overrightarrow{OI} = 1\overrightarrow{OI} + 0\overrightarrow{OK}$ donc I(1 ;0),
$\overrightarrow{OJ} = 1\overrightarrow{OI} + 1\overrightarrow{OK}$ donc J(1 ;1), $\overrightarrow{OK} = 0\overrightarrow{OI} + 1\overrightarrow{OK}$ donc K(0 ;1) ,
$\overrightarrow{OA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OI} + 0\overrightarrow{OK}$ donc $A\left(\frac{1}{2}; 0\right)$ et$\overrightarrow{OB} = 0\overrightarrow{OI} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OK}$ donc $B\left(0; \frac{1}{3}\right)$
On aura donc $\overrightarrow{AG} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 0-\frac{1}{2} \\ \frac{1}{3}-0 \end{pmatrix} = \left(\frac{3}{5}\overrightarrow{AB}\right)\begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\times\frac{3}{5} \\ \frac{1}{3}\times\frac{3}{5} \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AG}\begin{pmatrix} -\frac{3}{10} \\ \frac{1}{5} \end{pmatrix}$
$\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OA}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + \overrightarrow{AG}\begin{pmatrix} -\frac{3}{10} \\ \frac{1}{5} \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{OG}\begin{pmatrix} \frac{1}{2}-\frac{3}{10} \\ \frac{1}{5} \end{pmatrix} = \overrightarrow{OG}\begin{pmatrix} \frac{2}{10} \\ \frac{1}{5} \end{pmatrix}$ donc $G\left(\frac{2}{5}; \frac{2}{5}\right)$
2) $\overrightarrow{OJ}\binom{1}{1}$ donc $\overrightarrow{OG}\begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\overrightarrow{OJ}$ donc les deux vecteurs sont colinéaires et donc leurs droites associées sont parallélès et vu qu'en plus elles ont un point commun on peut dire qu'elles sont confondues et donc O, G et J sont alignés