I. Les vecteurs

Définition.
La translation qui transforme A en B est l'application du plan dans lui-même qui à tout point M associe un point M' tel que ABM'M soit un parallélogramme (éventuellement plat). On dit que cette translation est de vecteur $\overrightarrow{AB}$

Propriété.
Un vecteur $\vec{u}$ est caractérisé par :
- une direction,
- un sens et
- une longueur appelée la **norme** de $\vec{u}$ et notée $\|\vec{u}\|$.

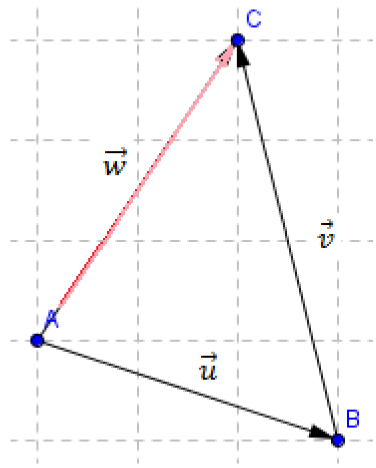
Si deux vecteurs ont les trois mêmes caractéristiques on peut dire qu'ils sont égaux

Remarque
La translation de vecteur $\vec{u}$ est une transformation du plan qui à tout point M associe un point M' tel que $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$

Propriétés.
Si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ alors ABDC est un parallélogramme, on note $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Rightarrow$ ABDC est un parallélogramme
Réciproquement
Si ABDC est un parallélogramme alors $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, on note ABDC est un parallélogramme $\Rightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

Définition / Notation.
On dit alors que les propositions « $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ » et « ABDC est un parallélogramme » sont **équivalentes.**
On note $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow$ ABDC est un parallélogramme.
On encore $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ si et seulement si ABDC est un parallélogramme.

Propriétés.
Soit trois points A,B et C $\qquad \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow$ B est le milieu de [AC]



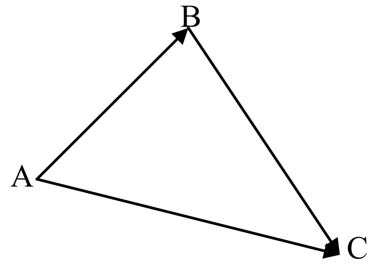
Définition
La composition de deux translations de vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est une translation de vecteur $\vec{w}$. On dira que $\vec{w}$ est la somme des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

$$\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$$

Remarque
Composer deux fonctions / transformations veux dire qu'on les appliques l'une après l'autre. Par exemple si j'applique successivement les translations de vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ notées respectivement $t_{\vec{u}}$ et $t_{\vec{v}}$ sur le point M. Celui-ci est transformé en M' lors de la première étape , point qui lui sera transformé en M'' lors de la seconde : $M \overset{t_{\vec{u}}}{\to} M' \overset{t_{\vec{v}}}{\to} M''$
D'après la définition précédente : la translation de vecteur $\vec{w}$ notée $t_{\vec{w}}$ transformera directement M en M'' : $M \overset{t_{\vec{w}}}{\to} M''$.

Relation de Chasles.
Pout tous points A,B et C on a : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

Démonstration
Soit trois points A, B et C,
Le point A est transformé en B par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$, le point B est transformé en C par la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$.
Ainsi la composition des translation de vecteurs $\overrightarrow{AB}$ puis $\overrightarrow{BC}$, qui est une translation de vecteur $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$, transforme A en C, elle est donc une translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$.
Donc $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

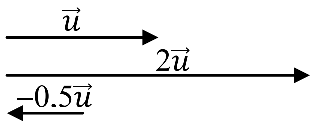


Remarques.
* $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ mais AB + BC≥AC
* $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$ c'est le vecteur nul.

II. Colinéarité de vecteurs

Définition.
Soit un vecteur $\vec{u}$ non nul et k un nombre réel non nul.
On définit le vecteur $k\ \vec{u}$ par :
- la même direction que celle du vecteur $\vec{u}$
- si $k > 0$, les vecteurs $k\ \vec{u}$ et $\vec{u}$ ont le même sens et si $k < 0$, les vecteurs $k\ \vec{u}$ et $\vec{u}$ sont de sens différent.
- La norme de $k\ \vec{u}$ est $|k|$ fois celle de $\vec{u}$: $\|k\ \vec{u}\| = |k| \times \|\vec{u}\|$.

Exemples.
►1.



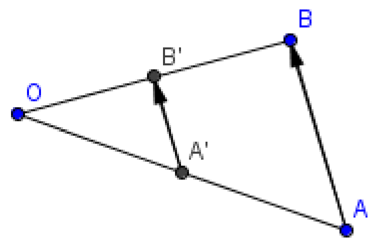
►2. Les vecteurs $\vec{u}$ est $-\vec{u}$ sont dits **opposés** : ils ont même direction, même norme mais des sens opposés. L'opposé de $\overrightarrow{AB}$ est $-\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$.
►3. Soit un segment [AB] et I le milieu de [AB]. Que peut-on dire de $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{AB}$?

Définition.
On dit que deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** lorsqu'il existe un nombre réel k tels que $\vec{v} = k \times \vec{u}$.
Cela signifie que les deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont la même direction.

Remarque.
Le vecteur nul est colinéaire à tous les vecteurs : $0 \times \vec{u} = \vec{0}$ et $k \times \vec{0} = \vec{0}$

Règles de calcul.
$k\ (\vec{u} + \vec{v}) = k\ \vec{u} + k\ \vec{v}$ $\qquad$ $(k + k')\ \vec{u} = k\ \vec{u} + k'\ \vec{u}$
Si $k \times \vec{u} = \vec{0}$ alors $k = 0$ ou $\vec{u} = \vec{0}$, réciproquement Si $k = 0$ ou $\vec{u} = \vec{0}$ alors $k \times \vec{u} = \vec{0}$.
On note $k \times \vec{u} = \vec{0} \Leftrightarrow k = 0$ ou $\vec{u} = \vec{0}$.

Exemple.
Soit OAB un triangle , A' et B' les milieux respectifs de [OA] et [OB].
Montrer que $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{A'B'}$
on a $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{A'O} + \overrightarrow{OB'}$
$= \frac{1}{2}\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB'}$ car A' est le milieu de [OA]
$= \frac{1}{2}\overrightarrow{AO} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$ car B' est le milieu de [OB]



$= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}\right) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

Au passage on vient de redémontrer les deux premiers théorèmes des milieux de seconde :
« si un segment a pour extrémités les milieux de deux des côtés d'un triangle alors il est paralléle au troisième côté et sa mesure est la moitié de celle de ce dernier »

III. Dans un repère

Une origine O et deux vecteurs non colinéaires $\vec{i}$ et $\vec{j}$ définissent un **repère** du plan $\left(0, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

Définition
Dans un repère $\left(0, \vec{i}, \vec{j}\right)$ du plan
Les coordonnées du vecteur $\vec{u}$ sont les nombres x et y tels que $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$. On note $\vec{u}\binom{x}{y}$.
Les coordonnées du point M sont les nombres x et y tels que $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$. On note M($x$, y).

Propriété.
Dans un repère $\left(0, \vec{i}, \vec{j}\right)$ du plan, A(x_A ; y_A) et B(x_B ; y_B).
Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont $\binom{x_B - x_A}{y_B - y_A}$.
Lorsque le repère est orthonormé, la distance euclidienne est $AB = \left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.

Propriétés.
Soit $\vec{u}\binom{x}{y}$ et $\vec{v}\binom{x'}{y'}$ deux vecteurs
* $\vec{u} = \vec{v} \Leftrightarrow x = x' \quad \text{et} \quad y = y'$.
* Les coordonnées du vecteur somme sont $\vec{u} + \vec{v}\binom{x + x'}{y + y'}$.
* soit k un réel, les coordonnées de $k \times \vec{u}$ sont $k\vec{u}\binom{kx}{ky}$.
* $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires $\Leftrightarrow \frac{x}{x'} = \frac{y}{y'}$ ou $xy' - x'y = 0$ *i.e.* les coordonnées sont proportionnelles.

Exemples.
Les vecteurs $\vec{u}\binom{2}{6}$, $\vec{v}\binom{1}{3}$ et $\vec{w}\binom{3}{1}$ sont-ils colinéaires ?
$\frac{2}{1} = \frac{6}{3}$ donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.
$1 \times 1 - 3 \times 3 = 1 - 9 = -8 \neq 0$ donc $\vec{v}$ et $\vec{w}$ ne sont pas colinéaires.

Points particuliers :
Dans un repère $\left(0, \vec{i}, \vec{j}\right)$ du plan, A(x_A ; y_A), B(x_B ; y_B) et C(x_C ; y_C).
I est le milieu de [AB] $\Leftrightarrow$ I $\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right)$.
G est le centre de gravité du triangle ABC $\Leftrightarrow$ G $\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \frac{y_A + y_B + y_C}{3}\right)$.

Exemple.
A(3 ; 2), B(7 ; 4), C(2 ; 4) et D(4 ; 5).
Les droites (AB) et (CD) sont-elles parallèles ?

$\overrightarrow{AB}\binom{7-3}{4-2}$ $\overrightarrow{AB}\binom{4}{2}$ et $\overrightarrow{CD}\binom{4-2}{5-4}$ $\overrightarrow{CD}\binom{2}{1}$
donc $\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{CD}$ les deux droites sont donc parallèles.

Les droites (AC) et (BD) sont-elles parallèles ?
$\overrightarrow{AC}\binom{2-3}{4-2}$ $\overrightarrow{AC}\binom{-1}{2}$ et $\overrightarrow{BD}\binom{4-7}{5-4}$ $\overrightarrow{BD}\binom{-3}{1}$
or $-1\times 1\div 2\neq -3$ donc les deux vecteurs ne sont pas colinéaires

Exemple 2 : A(3 ; 2), B(7 ; 4), E(-5 ; -2) et F(11 ; 7).
Les points A, B, E sont-ils alignés ?
$\overrightarrow{AB}\binom{7-3}{4-2}$ $\overrightarrow{AB}\binom{4}{2}$ et $\overrightarrow{AE}\binom{-5-3}{-2-2}$ $\overrightarrow{AE}\binom{-8}{-4}$
donc $\overrightarrow{AB}=-2\overrightarrow{AE}$ donc (AB) //(AE) donc les trois points sont alignés
Les points A, B, F sont-ils alignés ?
$\overrightarrow{AB}\binom{7-3}{4-2}$ $\overrightarrow{AB}\binom{4}{2}$ et $\overrightarrow{AF}\binom{11-3}{7-2}$ $\overrightarrow{AF}\binom{8}{5}$
$4\times 5\div 2\neq 8$ donc les deux vecteurs ne sont pas colinéaires donc les points ne sont pas alignés

Théorème.
Soit A(x_A ; y_A) et B(x_B ; y_B), la droite (AB) est l'ensemble des points M(x ; y) tels que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont colinéaires.

Application, déterminer l'équation d'une droite.
Soit A(2 ; 1) et B(4 ; 3). Déterminons l'équation de (AB).
Soit M(x ; y) un point de la droite (AB) alors $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont colinéaires.
Or $\overrightarrow{AB}\binom{4-2}{3-1}$ $\overrightarrow{AB}\binom{2}{2}$ et $\overrightarrow{AM}\binom{x-2}{y-1}$, puisque $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont colinéaires alors leurs coordonnées sont proportionnelles : $\frac{x-2}{2}=\frac{y-1}{2}$ donc $2(y-1)=2(x-2)$ $\Leftrightarrow$ $2y-2=2x-4$ et donc $y=x-1$.
$y=x-1$ est l'équation de la droite (AB) cela signifie que tous les points de la droite (AB) vérifient $y=x-1$ soit l'ordonnée est l'abscisse moins 1 et réciproquement.

Exemple.
Soit ABCD un parallélogramme, M et N deux points définis par $\overrightarrow{CM}=2\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CN}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$.
En vous plaçant dans le repère (D ; $\overrightarrow{DA}$; $\overrightarrow{DC}$) démontrer que (AM) et (DN) sont parallèles.
$\overrightarrow{DN}=\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CN}=\overrightarrow{DC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DC}$
Donc $\overrightarrow{DN}\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}\\ 1\end{pmatrix}$
$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}+2\overrightarrow{AB}$
$=\overrightarrow{AD}+3\overrightarrow{DC}=-\overrightarrow{DA}+3\overrightarrow{DC}$
Donc $\overrightarrow{AM}\binom{-1}{3}$
On en déduit que $\overrightarrow{AM}=3\overrightarrow{DN}$.
Les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{DN}$ sont colinéaires donc ils ont la même direction. On peut en déduire que les droites (DN) et (AM) sont parallèles.