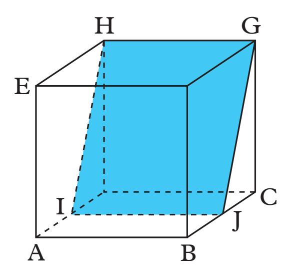
Chapitre

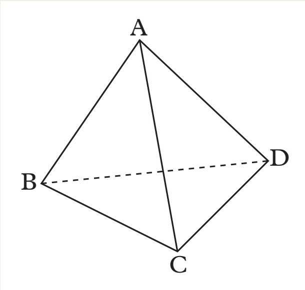
11 Géométrie dans l'espace

Pour reprendre contact



1. Section plane dans un cube

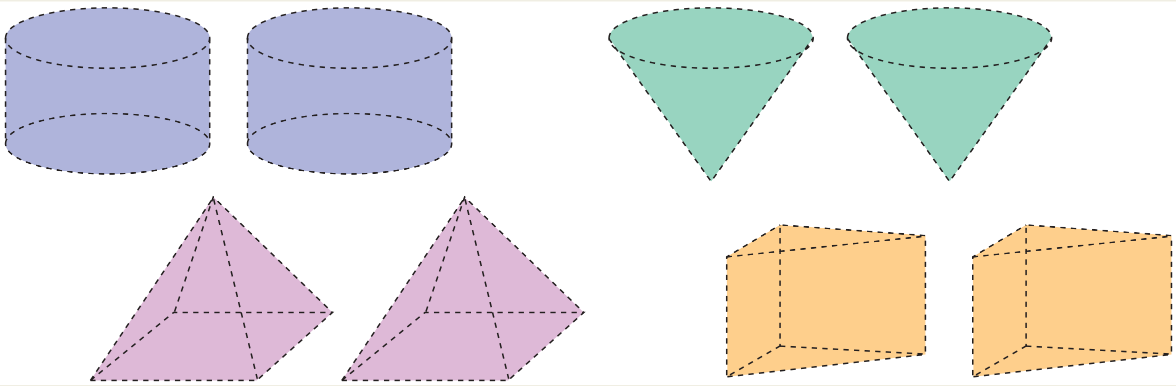
Quelle est la nature du quadrilatère GHIJ ?



2. Avec les solides

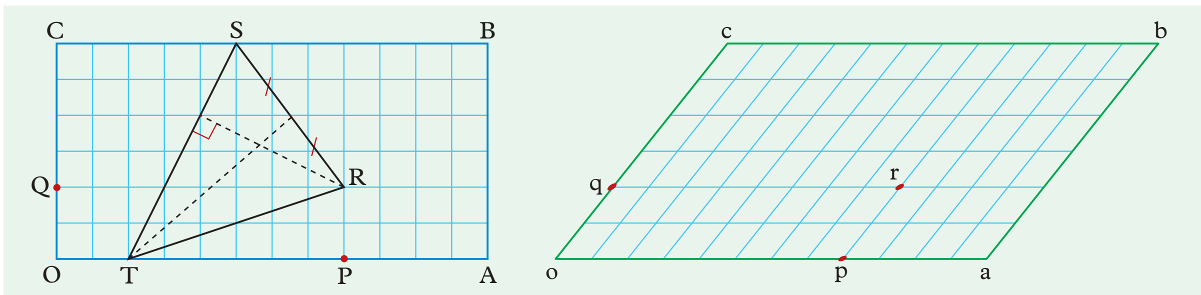
a. Sur la figure ci-contre, comment appelle-t-on le solide représenté ?
Indiquer les arêtes qui ne se rencontrent pas.

CD **b.** On a dessiné des solides en perspective. Indiquez le nom de chacun de ces solides et repassez en couleurs les lignes que vous considérez comme visibles, en laissant les autres en pointillés (deux possibilités à chaque fois).



CD Activité 1 ➥ En perspective

A ■ Avec un rectangle



Le rectangle OABC est représenté en perspective cavalière par le parallélogramme oabc.
Le point P situé aux deux tiers du segment [OA] est représenté par p, situé aux deux tiers du segment [oa]. De même Q, situé au tiers du segment [OC] est représenté par q, situé au tiers du segment [oc].

1. Reproduire le quadrillage de droite et placer sur la perspective les images des points R, S et T.

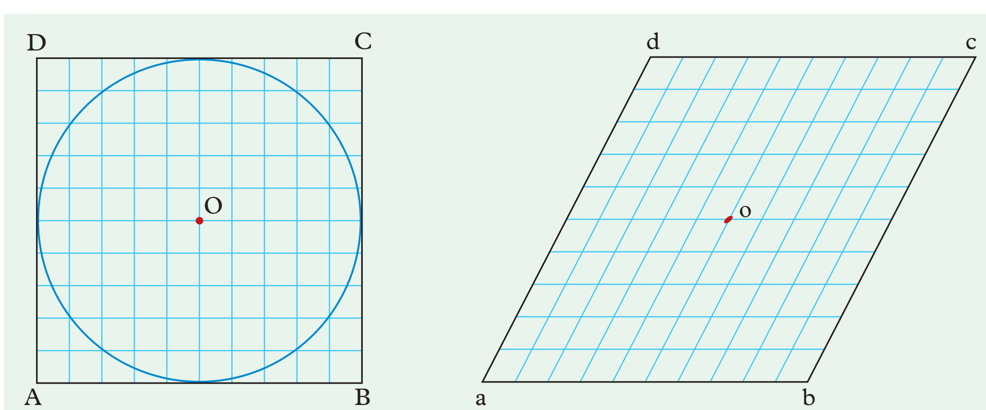
2. Tracer les perspectives de :

a. la hauteur issue de R du triangle RST ;

b. la médiane issue de T du triangle RST ;

c. la médiatrice du segment [RT].

B ■ Avec un carré



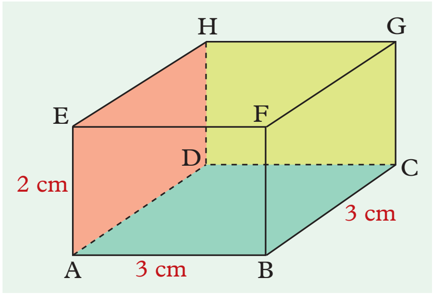
Le carré ABCD est représenté en perspective cavalière par le parallélogramme abcd.
Repérer les points du quadrillage qui sont sur le cercle, puis placer leurs images dans la perspective.
Tracer à main levée la courbe passant par tous ces points.

La courbe obtenue comme perspective du cercle s'appelle une ellipse.

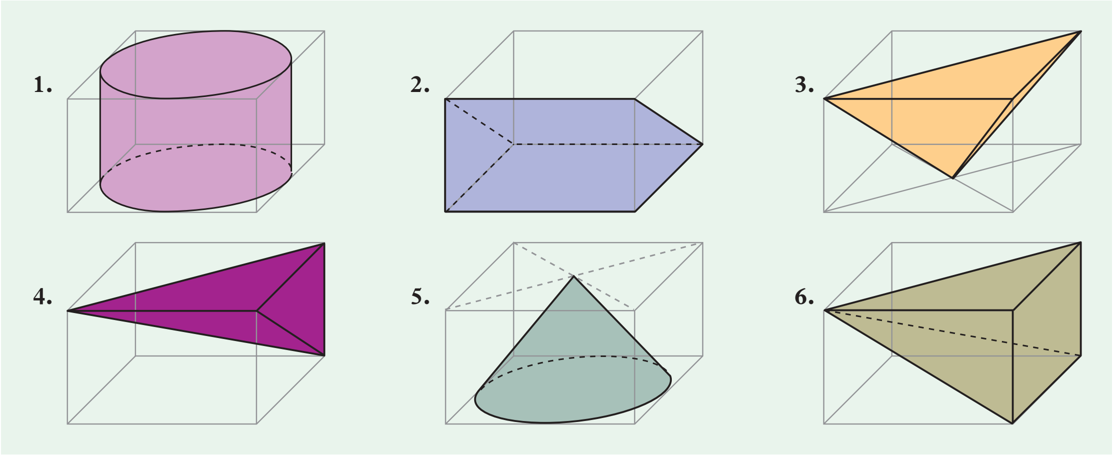
Activité 2 ➥ Calculs de volume

OBJECTIF

Revoir les formules de calculs des volumes (voir p. 353)

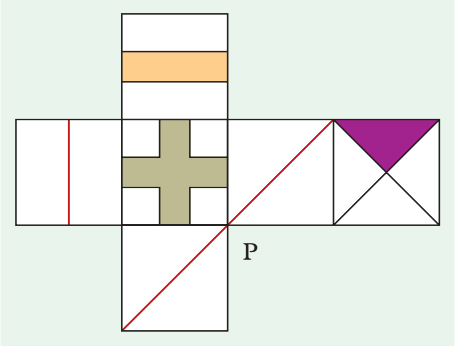


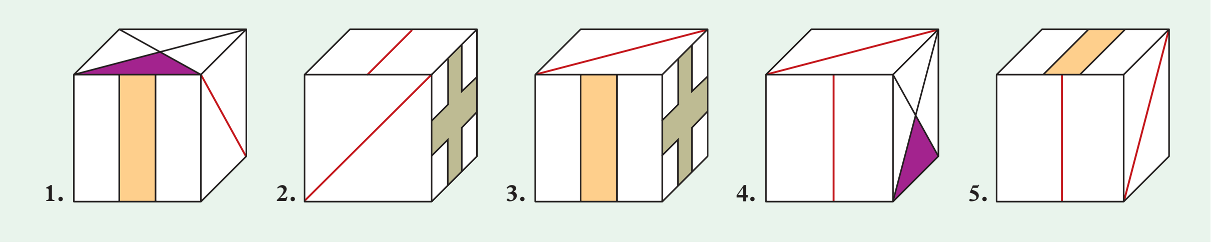
Les arêtes d'un parallélépipède rectangle ont pour mesures $AB = BC = 3$ cm et $AE = 2$ cm. Calculer le volume des solides ci-dessous.



Activité 3 ➥ Patron !

Lesquels des cubes ci-dessous peuvent être obtenus en repliant le patron P ?



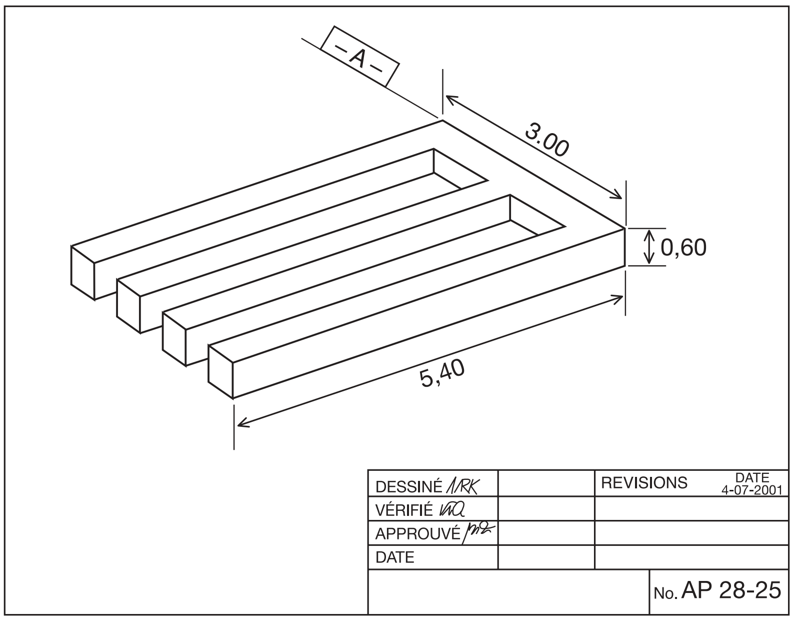


Activité 4 ➥ Du dessin à l'espace

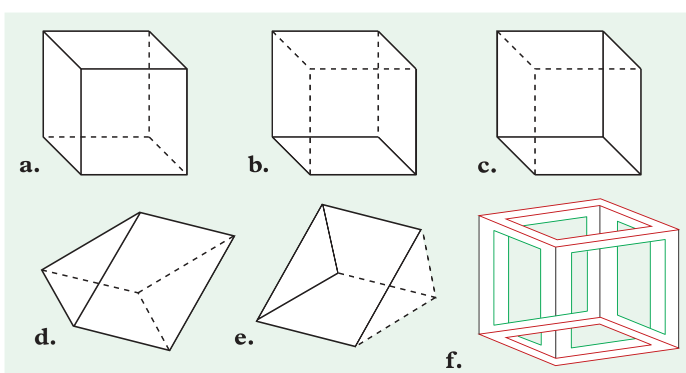
1. On a reproduit ci-dessous le dessin technique d'un objet.
a. Quelle est la largeur de cet objet ? son épaisseur ? sa longueur ?
b. Combien de branches comporte-t-il ?
c. Reproduisez cet objet sur votre feuille (unité : 1 cm). Commentez.

OBJECTIF

Être critique sur la représentation plane d'un objet de l'espace.



2. Les dessins suivants représentent-ils bien des cubes ou des prismes de l'espace ?



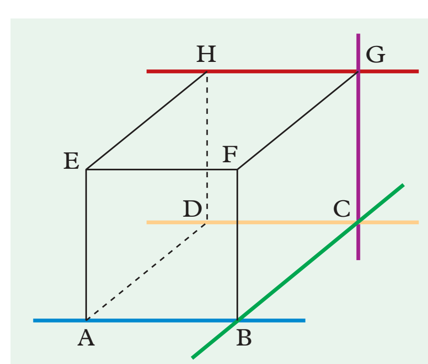
Activité 5 ➥ Positions relatives

ABCDEFGH est un parallélépipède rectangle. À votre avis quelle est la position relative :

1. des droites suivantes : (AB) et (DC) ; (AB) et (HG) ; (AB) et (BC) ; (AB) et (CG) ?

2. des droites et plans suivants : (AB) et (EFG) ; (EG) et (EFG) ; (CG) et (EFG) ; (AG) et (EFG) ?

3. des plans suivants : (ABCD) et (EFGH) ; (ABC) et (CDA) ; (AEFB) et (ABCD) ?

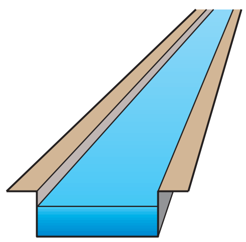


COURS

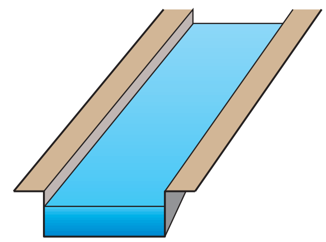
1. Perspective cavalière

A ■ Perspectives

La plupart des dessins de ce chapitre sont réalisés en perspective cavalière. C'est une convention mathématique de représentation des solides sur un plan. Ce n'est pas ce que nous voyons effectivement. La représentation la plus proche de notre vision est la perspective classique avec point de fuite.

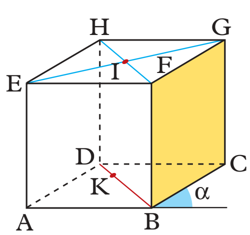


Un canal rectiligne dont les deux bords, dans la vision classique, se rejoignent à l'horizon, est représenté en perspective cavalière par des droites **parallèles.**



B ■ Réalité d'une figure de l'espace et représentation dans le plan

ABCDEFGH est un cube dont la face ABFE est *frontale*, c'est-à-dire parallèle au plan de la feuille de papier.
La représentation dépend du choix d'un angle α et d'un rapport k.



Pour cette figure, on a choisi :
- l'angle $\alpha = 30°$;
- le rapport $k = 0{,}7$.

Dans la réalité	Sur le dessin
[AB] et [CG] sont des arêtes *parallèles à la feuille*.	Elles sont représentées en *vraie grandeur*.
• [BC] est une arête *orthogonale* à la feuille. • Les arêtes [AB] et [BC] ont *même longueur*.	• [BC] fait un *angle* α avec l'horizontale. • [BC] et [AB] n'ont *pas même longueur* : $BC = k \times AB$.
Les diagonales (FH) et (BD) sont *parallèles*.	Elles sont représentées par des droites *parallèles*.
Les points E, I et G sont *alignés*.	Les points E, I et G sont *alignés*.
I est le *milieu* de [FH]. K est au *tiers* de [DB].	I est le *milieu* de [FH]. K est au *tiers* de [DB].

Propriété 1 ➜ **Deux droites parallèles dans la réalité sont représentées par deux droites parallèles dans la perspective cavalière.**

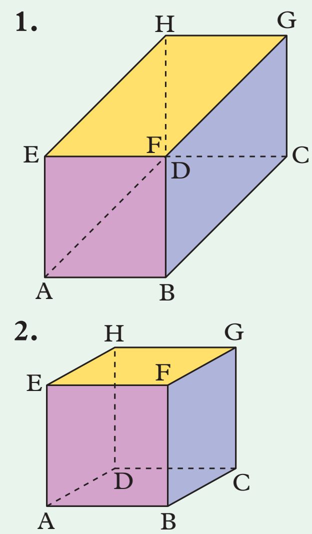
Attention : Si deux droites ne sont pas parallèles sur le dessin, les « vraies droites » ne le sont pas non plus. Cependant deux droites non parallèles peuvent fort bien être représentées sur le dessin par des droites qui le sont... Il faut donc être vigilant (voir exercice 3, page 279).

Propriété 2 ➜
- **Des points alignés sont représentés par des points alignés.**
- **La perspective cavalière converse les proportions.**

EXERCICES D'APPLICATION

Exercice 1 Faire le bon choix

On a dessiné un cube en perspective cavalière avec deux choix de l'angle α et du rapport k :
a. $\alpha = 30°$, $k = 0{,}75$ et **b.** $\alpha = 45°$, $k = \sqrt{2}$.
Reconnaître les deux vues. Quelle est la plus fidèle ?



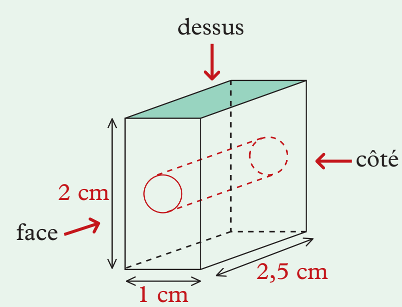
Solution

On mesure sur les dessins l'angle $\widehat{DAB}$ et le rapport $\dfrac{BC}{BA}$. La vue **1** a été dessinée avec le choix **b**, et la vue **2** avec **a**.

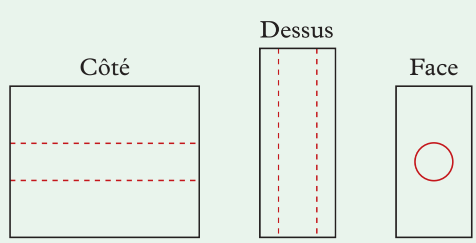
Remarque : la vue 2 correspond à notre « vision habituelle » d'un cube, plus que la vue 1 !

Exercice 2 Dessiner autrement !

On dessine des projections *orthogonales* à la feuille de dessin d'un parallélépipède rectangle percé d'un trou cylindrique de diamètre 0,5 cm. On obtient alors suivant les cas des vues de face, de côté ou de dessus. Dessiner les différentes vues.



Solution

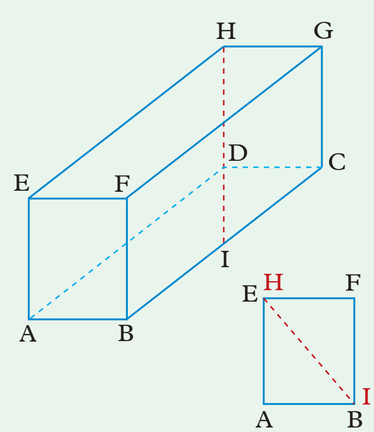


Remarque : Les dimensions sont en *vraie grandeur*.

voir aussi exercices n° 1 et 2

Exercice 3 Ne pas se laisser tromper par le dessin !

ABCDEFGH est un parallélépipède rectangle et I est le milieu de [BC].
La droite (HI) est-elle parallèle à (BF) ?



Solution

Si nous dessinons le solide suivant une projection orthogonale, avec la face (ABFE) parallèle à la feuille, la réponse est évidente : les droites (HI) et (BF) ne sont pas parallèles.

voir aussi exercices n° 4 et 5

COURS

2. Droites de l'espace

A ■ Détermination d'une droite

Comme dans le plan, une droite de l'espace peut être déterminée par :
- deux points A et B distincts. On parle de la droite (AB) ;
- un point A et la direction d'une droite D. On parle de la droite passant par A et parallèle à D.

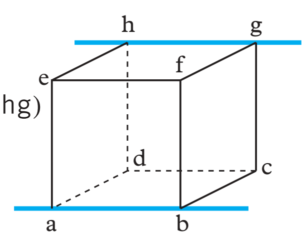
B ■ Position relative de deux droites

1. Droites coplanaires

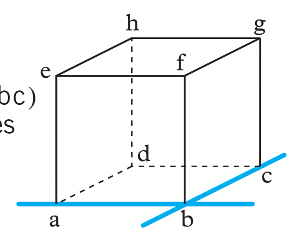
Définition 1 → **Deux droites sont dites coplanaires quand elles sont contenues dans un même plan. Dans ce cas, elles sont soit sécantes soit parallèles (éventuellement confondues).**

Exemple :

(ab) // (hg)



(ab) et (bc) sécantes

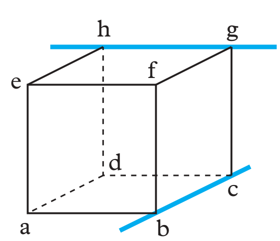


2. Droites non-coplanaires

Définition 2 → **Lorsqu'il n'existe pas de plan contenant deux droites, on dit qu'elles sont non-coplanaires.**

Attention :
Dans l'espace, deux droites peuvent être non sécantes et non parallèles. C'est le seul cas qui n'existe pas dans le plan.
Le dessin, qui pourrait laisser croire que (bc) et (hg) sont sécantes à l'extérieur de la figure, ne peut jamais, *encore moins que dans le plan*, servir de démonstration.

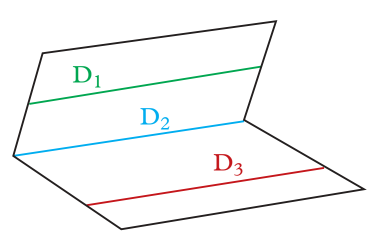
Exemple : (bc) et (hg) ne sont ni parallèles, ni sécantes.



3. Transitivité du parallélisme

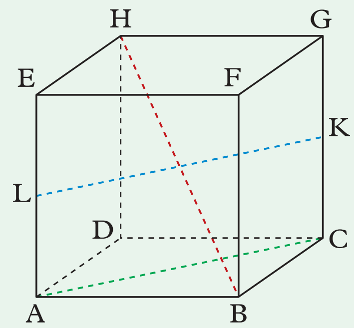
Propriété 3 → **Soient D_1, D_2 et D_3 trois droites de l'espace.**

$$\left.\begin{array}{l} D_1 \,//\, D_2 \\ D_2 \,//\, D_3 \end{array}\right\} \Rightarrow D_1 \,//\, D_3$$



EXERCICES D'APPLICATION

Exercice 4 Étudier des intersections de droites



On se place dans le cube ABCDEFGH.

1. Étudier la position relative des droites (AC) et (BH).

2. L et K sont les milieux des côtés $[AE]$ et $[CG]$. Étudier la position relative des droites (LK) et (BH).

Solution

1. Si les droites étaient coplanaires, les points A, B, C et H seraient coplanaires. Or ils ne le sont pas : le plan (ABC) est le plan de la face inférieure du cube et le point H n'en fait pas partie. Les droites ne sont donc pas coplanaires. Par suite, elles ne sont ni sécantes ni parallèles.

2. Soit I le milieu de $[BF]$; LHGI est un parallélogramme car $LI = HG$ et $(HG) // (LI)$ et LHGI est non croisé.

De même, GKBI est un parallélogramme car $GK = BI$ et $(GK) // (BI)$ et GKBI est non croisé. Il en résulte $(BK) // (GI)$ et $(GI) // (LH)$.

Nous en déduisons $(BK) // (LH)$.

Les points B, K, H, L sont donc coplanaires. Les droites (LK) et (BH), étant coplanaires et non parallèles, elles sont sécantes.

Méthode

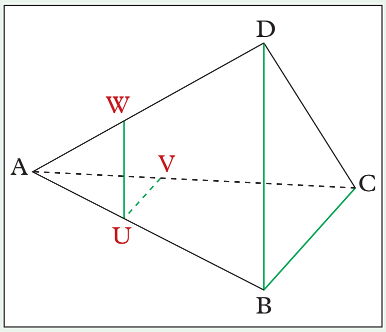
Pour étudier la position relative de deux droites dans l'espace, la première question à se poser est « sont-elles coplanaires ou non-coplanaires ? »

voir aussi exercices n° 19 à 22

Exercice 5 Démontrer en utilisant des propriétés de géométrie plane

On considère le tétraèdre ABCD. Soit U un point de $[AB]$ distinct de A et de B. La parallèle à (BC) passant par U coupe $[AC]$ en V. La parallèle à (BD) passant par U coupe $[AD]$ en W. Démontrer que (VW) est parallèle à (CD).

Solution



Dans le plan (ABC), (AB) et (AC) sont sécantes en A et $(UV) // (BC)$ donc d'après le théorème de Thalès : $\dfrac{AU}{AB} = \dfrac{AV}{AC}$ (1).

Dans le plan (ABD), on démontre de la même façon que $\dfrac{AU}{AB} = \dfrac{AW}{AD}$ (2).

De (1) et (2), on déduit que $\dfrac{AV}{AC} = \dfrac{AW}{AD}$.

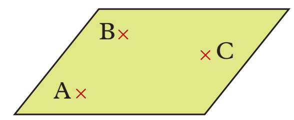
Dans le triangle ACD, les points A, W, D d'une part et A, V, C d'autre part, étant alignés dans cet ordre, sont tels que $\dfrac{AV}{AC} = \dfrac{AW}{AD}$. La réciproque du théorème de Thalès implique que $(VW) // (CD)$.

voir aussi exercices n° 42, 61

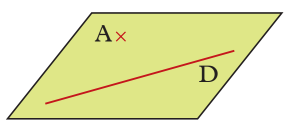
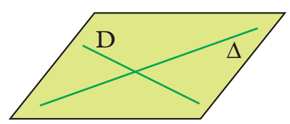
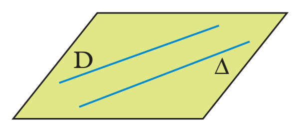
3. Plans de l'espace

A ■ Détermination d'un plan

Propriété 4 → Par trois points A, B, C **non alignés** passe un seul plan. On le note (ABC).

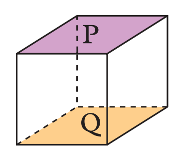


Conséquence : Un plan peut aussi être déterminé par…

une droite et un point extérieur à la droite	deux droites sécantes	deux droites distinctes parallèles
		

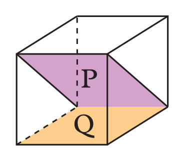
B ■ Position relative de deux plans

Définition 3 → Deux plans sont parallèles soit quand ils sont confondus, soit quand ils n'ont aucun point commun. Deux plans non parallèles sont dits sécants.



P // Q

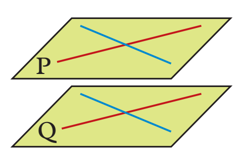
Propriété 5 → L'intersection de deux plans sécants est une droite.



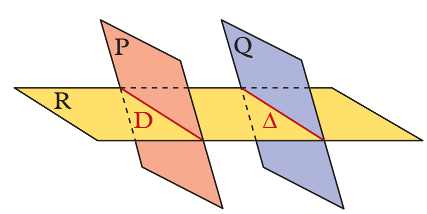
P et Q sécants

C ■ Plans parallèles

Propriété caractéristique 6 → P et Q sont parallèles si et seulement si P contient deux droites sécantes parallèles à deux droites de Q.

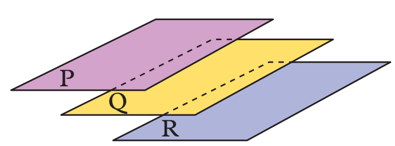


Propriété 7 → Soient P et Q deux plans parallèles.
1. Si R est un plan sécant avec l'un, il est aussi sécant avec l'autre.
2. Les droites d'intersection D et Δ sont parallèles.



Propriété 8 → Soient P, Q et R trois plans.

$$\left.\begin{array}{l} P \mathbin{//} Q \\ Q \mathbin{//} R \end{array}\right\} \Rightarrow P \mathbin{//} R$$



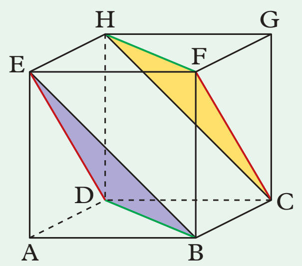
EXERCICES D'APPLICATION

Exercice 6 Démontrer un parallélisme de deux plans

Dans le cube ABCDEFGH, démontrer que les plans (BDE) et (CFH) sont parallèles.

Solution

Dans le quadrilatère non croisé DBFH, les côtés [BF] et [DH] sont parallèles et de même longueur (propriétés du cube). Donc DBFH est un parallélogramme. Par suite les côtés opposés [FH] et [DB] sont eux aussi parallèles. On démontre de même que les segments [FC] et [DE] sont également parallèles.
Le plan (BDE) contient deux droites **sécantes** (DB) et (DE) respectivement parallèles aux droites (FH) et (FC) contenues dans le plan (CFH). Ces deux plans sont donc parallèles.



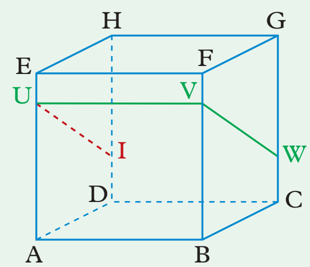
voir aussi exercice n° 22

Exercice 7 Trouver une intersection de deux plans

Dans le cube ABCDEFGH, $U \in [AE]$, $V \in [BF]$, $W \in [CG]$. Déterminer l'intersection du plan (P) défini par U et la droite (VW) avec la face ADHE du cube.

Solution

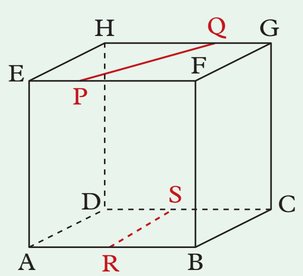
La droite (VW) est incluse dans les plans P et (BCG) puisque V et W appartiennent à ces plans. Or les plans (BCG) et (ADH) sont parallèles (propriété du cube).
On sait qu'un plan coupe deux plans parallèles suivant deux droites parallèles. Donc l'intersection de (P) avec (ADH) est la parallèle à (VW) passant par U. Elle coupe le côté [DH] en I.



voir aussi exercices n° 29 à 31

Exercice 8 Des points coplanaires ?

Dans le cube ABCDEFGH, pourquoi les quatre points P, Q, R, S ne sont-ils pas coplanaires ?



Trois points non-alignés sont toujours coplanaires. C'est pour étudier la **situation de quatre points** que les difficultés commencent...

Solution

Raisonnons par l'absurde : s'ils appartenaient à un même plan, celui-ci couperait les plans parallèles (ABC) et (EFG) suivant les deux droites (PQ) et (RS) qui devraient être parallèles et donc parallèles sur le dessin, ce qui n'est pas le cas. Les points ne sont donc pas coplanaires.

4. Droites et plans

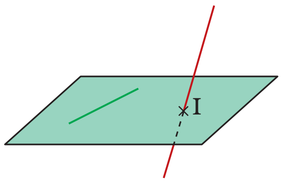
A ■ Inclusion d'une droite dans un plan

Propriété 9 ➜ **Si A et B sont deux points d'un plan P, alors la droite (AB) toute entière est contenue dans P.
On dit qu'elle est incluse dans P.**

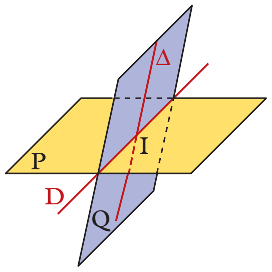
B ■ Position relative d'une droite et d'un plan de l'espace

1. Droites et plans sécants

Définition 4 ➜ **Une droite et un plan sont dits sécants quand ils ont un seul point commun.**



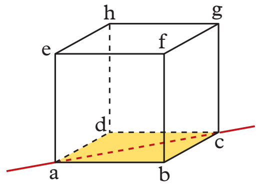
Remarque : En pratique, on utilise souvent le raisonnement suivant :
Soit P et Q deux plans sécants suivant une droite D.
Si la droite Δ, incluse dans Q coupe le plan P en I, alors ce point appartient à D.



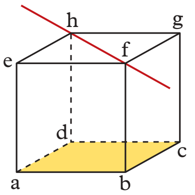
2. Droites et plans parallèles

Définition 5 ➜ **Si la droite D est incluse dans le plan P ou si D et P n'ont aucun point commun, on dit qu'ils sont parallèles.**

Exemple : Soit P le plan (abc) du cube.

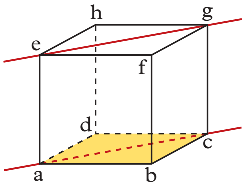


(ac) est incluse dans P.



(hf) est parallèle au plan P.

Propriété caractéristique 10 ➜ **Soit D une droite et P un plan.
D est parallèle à P si et seulement si D est parallèle à une droite de P.**



(eg) // (abc) car (eg) // (ac).

EXERCICES D'APPLICATION

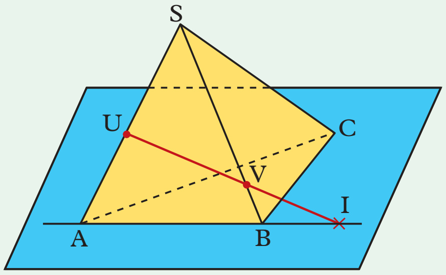
Exercice 9 Trouver l'intersection d'une droite et d'un plan

Deux points U et V appartenant aux côtés [SA] et [SB] d'un tétraèdre SABC sont tels que la droite (UV) n'est pas parallèle au plan de base (ABC).
Construire le point d'intersection de la droite (UV) avec (ABC).

Solution

U et V appartiennent aux côtés [SA] et [SB], donc ils appartiennent au plan (SAB). Par suite, la droite (UV) est contenue dans ce plan (propriété d'inclusion), donc (UV) et (AB) sont coplanaires.
La droite (UV) n'étant pas parallèle à (ABC), elle n'est pas parallèle à (AB). Donc les droites (UV) et (AB) sont sécantes en un point I de (AB).
Comme (AB) est incluse dans le plan (ABC), I est un point de (ABC).
C'est donc bien le point d'intersection.

Méthode
Pour trouver l'intersection d'une droite Δ avec un plan P, on cherche une droite D du plan P sécante avec Δ.
Leur point d'intersection est le point cherché.



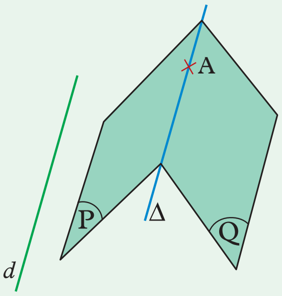
voir aussi exercices n° 9, 23 et 33

Exercice 10 Le théorème du toit CD

Soit deux plans sécants P et Q parallèles à une même droite *d*.
Montrer que leur droite d'intersection Δ est parallèle à *d*.

Solution

Soit A un point commun à P et Q.
Dans P, passe par A une droite d' parallèle à *d*.
Dans Q, passe également par A une droite d'' parallèle à *d*.
Comme il ne passe par A qu'une seule droite parallèle à *d*, d' et d'' sont confondues. Il s'agit de Δ qui est donc parallèle à *d*.



voir aussi exercices n° 35, 36, 37, 38

COURS

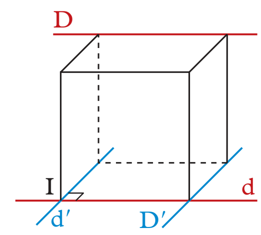
5. Orthogonalité dans l'espace

A ■ Droites orthogonales

Définition 6 → **Deux droites de l'espace sont orthogonales si et seulement si leurs parallèles issues d'un même point sont perpendiculaires.**

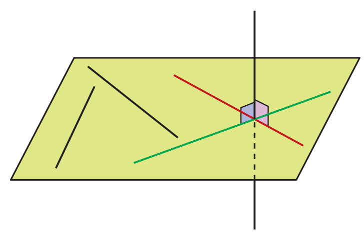
Exemple : Soient D // *d* et D′ // *d*′ .
Comme *d* et *d*′ sont perpendiculaires en I, alors D et D′ sont orthogonales.

Remarque : On réserve le terme « droites perpendiculaires » à des droites qui sont orthogonales et sécantes.



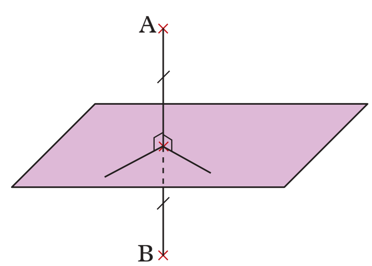
B ■ Droite orthogonale à un plan

Définition 7 → **Une droite est orthogonale à un plan si et seulement si elle est orthogonale à toutes les droites du plan.**



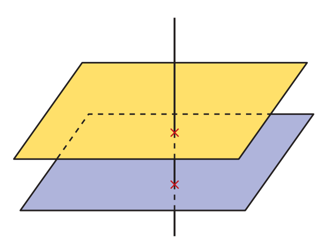
Propriété 11 → **Pour qu'une droite soit orthogonale à un plan, il suffit qu'elle soit orthogonale à deux droites sécantes du plan.**

Remarque : Le plan passant par le milieu d'un segment et qui lui est orthogonal s'appelle plan médiateur du segment.

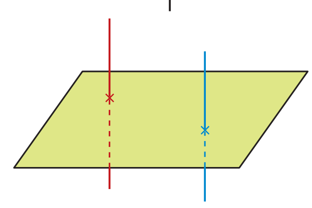


C ■ Parallélisme et orthogonalité

Propriété 12 → **Deux plans orthogonaux à une même droite sont parallèles.**



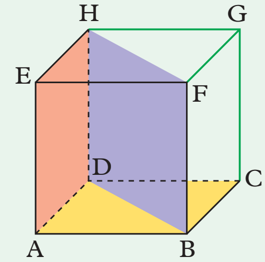
Propriété 13 → **Deux droites orthogonales à un même plan sont parallèles.**



EXERCICES D'APPLICATION

Exercice 11 Se méfier de certaines affirmations

1. Est-il vrai que deux droites orthogonales à une même droite sont parallèles ?
2. Est-il vrai que si deux droites sont orthogonales, un plan parallèle à l'une est orthogonal à l'autre ?



Solution

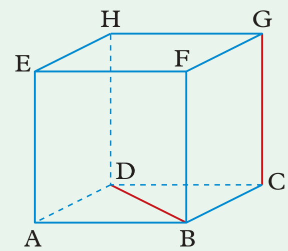
Les deux affirmations sont fausses. Plaçons-nous dans le cube ABCDEFGH.

1. Les droites (GH) et (GF) sont perpendiculaires à (CG) mais ne sont pas parallèles entre elles.

2. Les droites (DA) et (CG) sont orthogonales. Le plan (DBF) est parallèle à (CG) mais n'est pas orthogonal à (DA).

Exercice 12 Démontrer l'orthogonalité de deux droites

Dans le cube ABCDEFGH, (CG) et (BD) sont-elles orthogonales ?



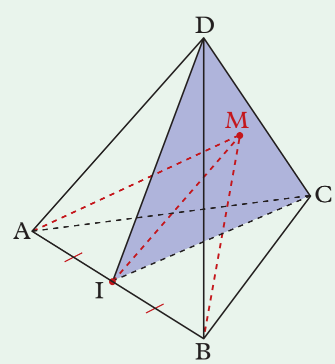
Solution

On sait que $(CG) \perp (CD)$ et $(CG) \perp (CB)$. Donc la droite (CG) est orthogonale au plan (BCD). Elle est orthogonale à toutes les droites incluses dans ce plan et en particulier à (BD).

voir aussi exercices n° 41 et 42

Exercice 13 Trouver le plan médiateur d'un segment

Dans le tétraèdre régulier ABCD (c'est-à-dire dont toutes les arêtes ont même longueur), soit I le milieu de [AB].
1. Quel est le plan médiateur de [AB] ?
2. Démontrer que tout point M de ce plan est équidistant de A et B.



Solution

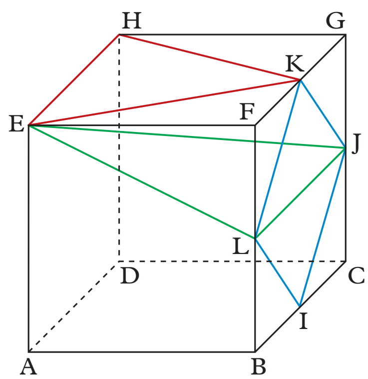
1. Les faces d'un tétraèdre régulier étant des triangles équilatéraux, la médiane (DI) du triangle ABD est une hauteur : $(AB) \perp (DI)$. On démontre de même que $(AB) \perp (CI)$. Donc (AB) est orthogonale au plan (DCI) qui en est le plan médiateur.
2. Soit M un point, distinct de I, du plan (DCI) (si $M = I$, on a bien $IA = IB$). Puisque (AB) est orthogonale au plan (DCI), elle est orthogonale à toutes les droites de ce plan donc $(AB) \perp (IM)$. Dans le plan (AMB) la droite (IM) est donc une médiatrice de (AB). Par suite $MA = MB$.

Point info

La réciproque de la propriété énoncée à la question **2** est vraie : le plan médiateur *est* l'ensemble des points équidistants de A et B.

voir aussi exercice n° 46

CD 1. Que voit-on ?

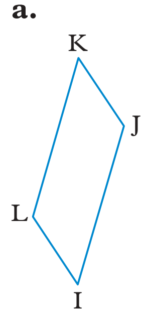


La figure ci-contre représente un cube ABCDEFGH **de côté 3 cm**. I, J, K, L sont les milieux des côtés [BC], [CG], [GF], [BF].

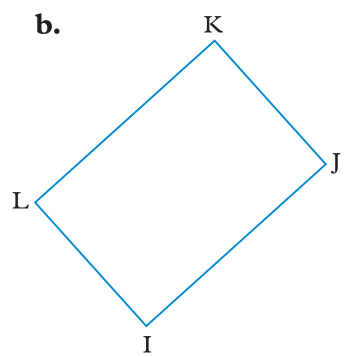
Pour chaque question, l'un des dessins est en vraie grandeur. Cela signifie que ses dimensions sont exactement celles de la figure réellement dessinée sur le cube. Quel est le bon dessin ?

1. Quadrilatère IJKL

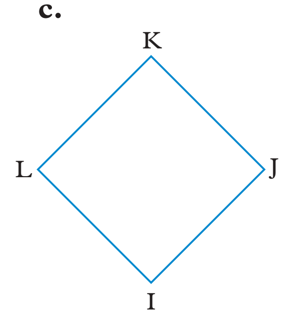
a.



b.

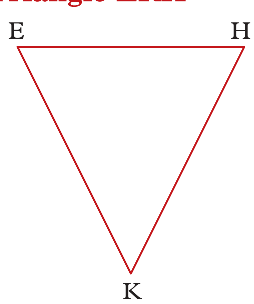


c.

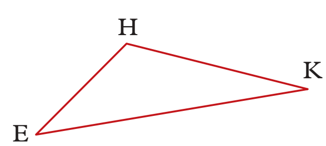


2. Triangle EKH

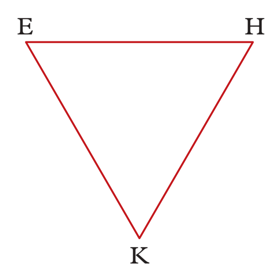
a.



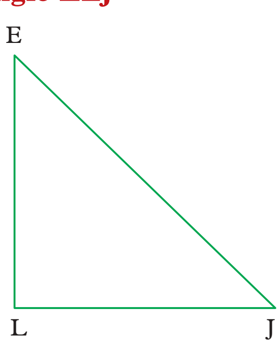
b.

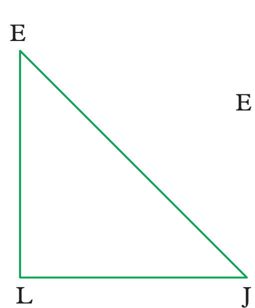


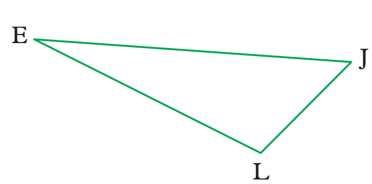
c.



3. Triangle ELJ







Thème d'étude

CD 2. Les solides de l'espace

OBJECTIF : **Découvrir les cinq solides de Platon et émettre une conjecture.**

« Nul n'entre ici s'il n'est géomètre »
Platon (428-348 avant J.-C.) fut le premier à démontrer qu'il n'existe, parmi tous les solides de l'espace, que cinq polyèdres réguliers convexes : le tétraèdre, le cube, l'octaèdre, le dodécaèdre, et l'icosaèdre ; qui ont la particularité remarquable d'avoir pour faces des polygones réguliers tous identiques.
Enthousiasmé par sa découverte, Platon a présenté ces solides comme les éléments du monde, les cinq solides cosmiques : le tétraèdre symbolise le feu, l'octaèdre l'air, le cube la terre, l'icosaèdre l'eau et le dodécaèdre l'univers.

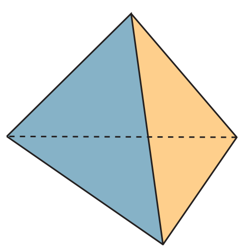
Pour chacun de ces solides :

a. Identifier le polygone régulier qui constitue une face.

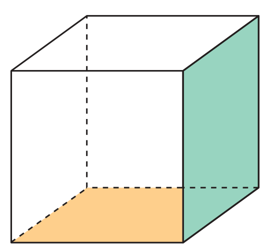
b. Compter le nombre A d'arêtes, F de faces et S de sommets.

c. Calculer $F + S - A$. Que remarque-t-on ?

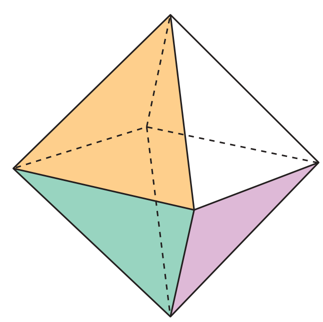
1. Tétraèdre



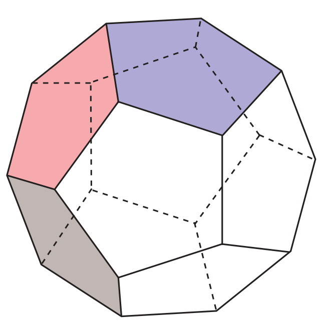
2. Cube



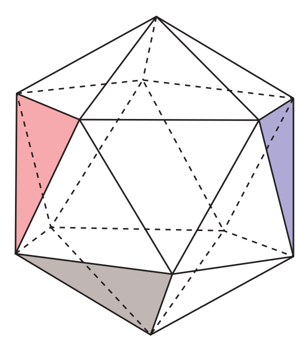
3. Octaèdre



4. Dodécaèdre



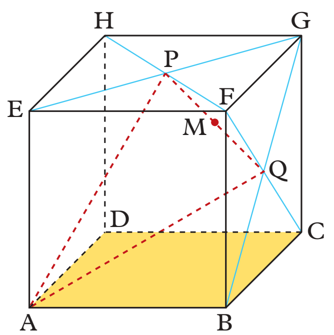
5. Icosaèdre



Pour aller plus loin : sur Internet, faites « Abracadabri » !

3. Calculs dans un cube

OBJECTIF : Utiliser les théorèmes de géométrie plane dans différents plans de l'espace.



Les arêtes du cube ABCDEFGH ont pour mesure l'unité.
Les points P et Q sont les centres des faces EFGH et BCGF.

1. a. Démontrer que $EP = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

b. Justifier que le triangle AEP est rectangle en E. Calculer AP.

2. Justifier de même que $AQ = \frac{\sqrt{6}}{2}$.

3. Soit M le milieu de [PQ].

a. Justifier que PAM est rectangle en M.

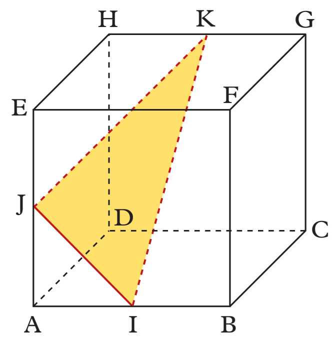
b. En considérant le triangle BEG, démontrer que $PQ = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

4. a. Calculer une valeur approchée en degrés à 0,01 près de la mesure de l'angle $\widehat{PAM}$.

b. En déduire une valeur approchée en degrés à 0,1 près de la mesure de l'angle $\widehat{PAQ}$.

4. Avec le logiciel Geospace

OBJECTIF : S'aider d'une figure dynamique de l'espace pour conjecturer puis démontrer.



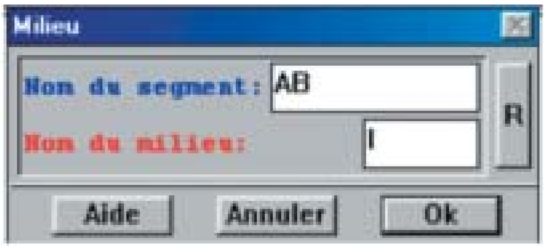
ABCDEFGH est un cube dont les arêtes ont pour mesure l'unité.
I, J et K sont les milieux des segments [AB], [AE] et [GH].

A. ➡Conjecture

À votre avis, quelle est la nature du triangle IJK ?

B. ➡ Création et exploration de la figure à l'aide de GeospacW

1. Ouvrez le logiciel Geospace. Dans le menu *Fichier*, choisissez *Charger une figure*. Choisissez le répertoire *Bases*, puis la figure *cube2.g3w*. Validez par OK. Le cube ABCDEFGH va apparaître.



2. Dans le menu *Créer*, choisissez *Point* puis *Milieu*, entrez le nom du segment : *AB* puis du milieu : *I* comme ci-contre. Cliquez sur OK.

3. Recommencez pour créer J et K.

4. Dans le menu *Créer*, choisissez *Ligne*, puis *Polygone convexe*, puis *Défini par ses sommets*. Entrez *IJK* comme sommets et *T* comme nom pour le triangle.

5. Exploration : Dans le menu *Vues*, choisissez *Vue avec un autre plan de face*. Complétez comme indiqué ci-contre : Cliquez sur OK.

6. Confirmez-vous votre conjecture du début ?

7. Appuyez simultanément sur les touches Ctrl et F1 du clavier pour revenir à la vue de départ.

C. ➡ Justification

1. Dans le menu *Créer*, choisissez *Point*, *Intersection d'une droite et d'un plan*. Créez ainsi le point P intersection de la droite (IJ) et du plan (HEF).

2. Le point P semble aligné avec deux autres points de la figure. Lesquels ? Justifiez ce résultat.

3. Tracez le triangle KPI (comme à la question **B4**) et nommez-le T′.

4. a. Tracez de même le quadrilatère IPEB et nommez-le Q1.

b. Montrez que IPEB est un parallélogramme et déduisez-en IP.

c. Montrez que J est le milieu de [IP].

5. Tracez le quadrilatère EPKG et nommez-le Q2. Calculez KP.

6. Tracez le quadrilatère AIKH et nommez-le Q3. Calculez IK.

7. Quelle est la nature du triangle KPI ? Déduisez-en la nature du triangle IJK.

Méthode

Pour changer la couleur d'un objet représenté :

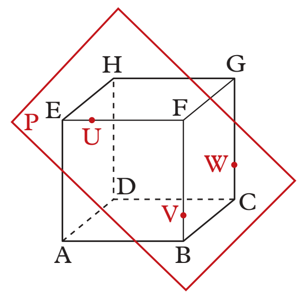
- cliquez sur l'icône 
- cliquez sur l'une des couleurs proposées
- cliquez dans la figure sur l'objet concerné
- cliquez sur *Fermer*.

5. Sections planes de cubes

A. ➡ Des intersections de plans

ABCDEFGH est un cube. U, V et W sont tels que : U ∈ [EF], V ∈ [BF], W ∈ [CG].

1. Faire la figure. On tracera au fur et à mesure les intersections trouvées.
Justifier que U, V et W ne sont pas alignés.
On note P le plan déterminé par U, V et W.



2. a. Repérer deux points appartenant à P et au plan (BCG). En déduire l'intersection de ces deux plans.

b. Déterminer l'intersection des plans P et (ABF).

3. Intersection avec (DCG)

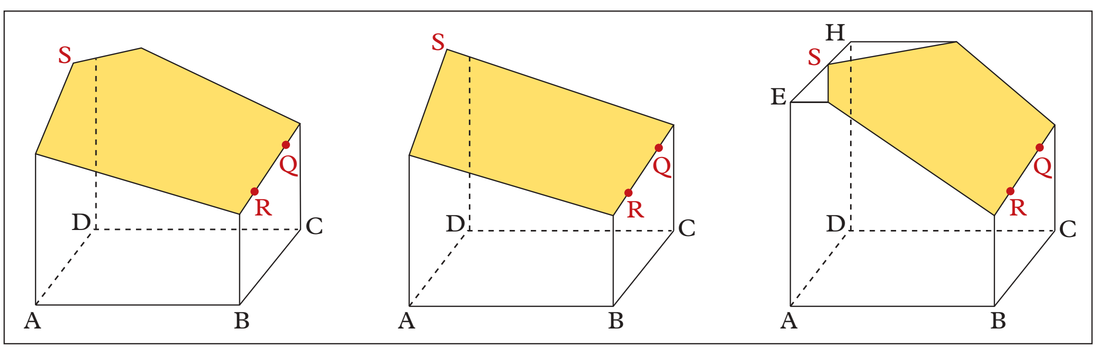
a. On connaît a priori un seul point appartenant à P et à (DCG). Lequel ?

b. Utiliser la propriété 7 pour déterminer l'intersection de P avec (DCG).

c. Tracer l'intersection de P avec (EFG).

B. ➡ Quelle est la bonne intersection ?

S est un point du côté [EH], Q et R sont deux points de la face (BCG). On a tracé le polygone, intersection du cube avec le plan (QRS).
Quel est le dessin qui représente la bonne intersection ?



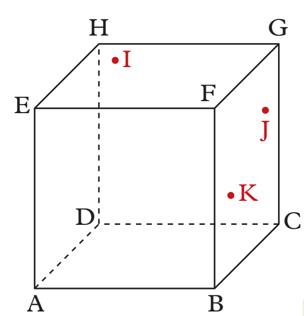
C. ➡ En sortant du cube...

I est un point de la face (EFG). J et K appartiennent à la face (BCG). On note $\mathcal{P}$ le plan (IJK).

1. Déterminer l'intersection de (JK) avec (EFG).

2. En déduire le segment intersection de $\mathcal{P}$ avec la face (EFG) du cube.

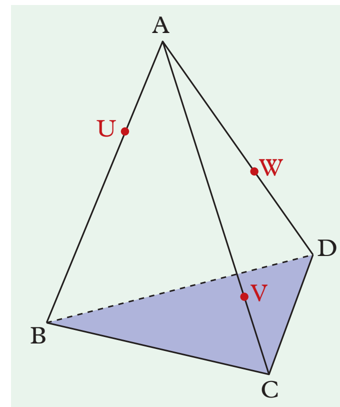
3. Tracer toutes les intersections de $\mathcal{P}$ avec les faces du cube.



EXERCICES RÉSOLUS

1 Démontrer un alignement

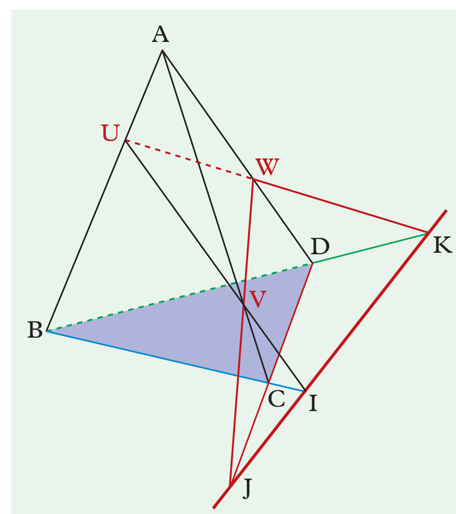
Trois points U, V et W appartiennent aux côtés [AB], [AC] et [AD] d'un tétraèdre ABCD.
Tracer les intersections I, J et K des droites (UV), (VW) et (WU) avec le plan (BCD).
Démontrer que I, J et K sont alignés.



Une solution

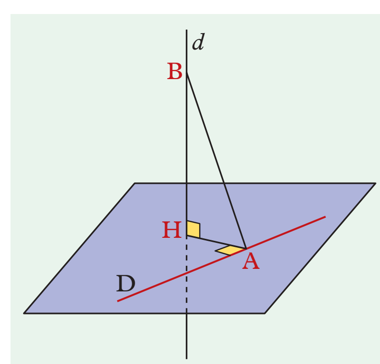
• U et V appartiennent au plan (ABC). Le point I, intersection de (UV) et du plan (BCD), est sur la droite intersection de (ABC) et (BCD), c'est-à-dire (BC).
Donc I est l'intersection de (UV) et (BC).
On trace de même J intersection de (VW) et (CD) et K intersection de (WU) et (DB).
• Comme l'énoncé l'indique, les points I, J et K semblent effectivement alignés.
I, point de la droite (UV), est donc aussi dans le plan (UVW). Il en est de même des points J, point de (VW) et K, point de (WU). Donc I, J et K appartiennent au plan (UVW). D'autre part, par définition, ces trois points appartiennent au plan (BCD). Ils sont donc alignés sur la droite d'intersection des plans (UVW) et (BCD).

voir aussi exercices n° 25, 26, 27



2 Démontrer une orthogonalité

Soit P le plan défini par une droite D et un point H extérieur à D. On note A le pied de la perpendiculaire abaissée de H sur D.
Soit d la droite orthogonale en H au plan P et B un point de d distinct de H.
Démontrer que les droites D et (AB) sont orthogonales.



Une solution

Par définition, la droite (HB) est orthogonale au plan P. Donc (définition 6), elle est orthogonale à toutes les droites de ce plan, en particulier à la droite D : $D \perp (HB)$ (1).
D'autre part, d'après l'énoncé, la droite (HA) est perpendiculaire à D : $D \perp (HA)$ (2).
Considérons alors le plan (AHB). Il contient les droites (HA) et (HB). D'après (1) et (2), la droite D est orthogonale à deux droites sécantes de ce plan. D'après la propriété 11, elle est orthogonale au plan (AHB). Donc elle est orthogonale à toutes les droites de ce plan, en particulier à la droite (AB) : $D \perp (AB)$.

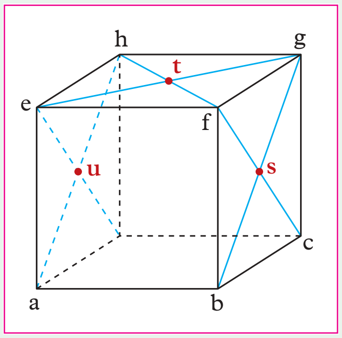
Commentaires

Remarquez bien le cœur du raisonnement : « Dès qu'une droite est orthogonale à un plan, elle est orthogonale à toutes les droites de ce plan. »
La propriété démontrée est une propriété classique appelée ***théorème des trois perpendiculaires****.*

voir aussi exercices n° 44, 45, 46

Que sais-je ?

1 Sécant ou parallèle ?



Choisir la bonne réponse :

1. Les droites (us) et (ef) sont :

A sécantes B parallèles C ni l'une ni l'autre

2. Les droites (ts) et (ef) sont :

A sécantes B parallèles C ni l'une ni l'autre

3. Les droites (au) et (ft) sont :

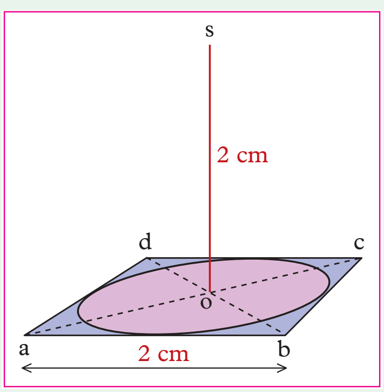
A sécantes B parallèles C ni l'une ni l'autre

4. Les droites (au) et (cs) sont :

A sécantes B parallèles C ni l'une ni l'autre

2 Volumes

Sur la figure suivante, abcd est un carré de centre o et de côté 2 cm.



Choisir la bonne réponse.
Quel est le volume, en cm^3 :

1. du cône de sommet s et de base le disque inclus dans le carré ?

A $\frac{8\pi}{3}$ B $\frac{4\pi}{3}$ C $\frac{2\pi}{3}$ D $\frac{\pi}{3}$

2. du cylindre de hauteur os et de base le disque inclus dans le carré ?

A 8π B 4π C 2π D π

3. de la pyramide de sommet s et de base abcd ?

A $\frac{8}{3}$ B $\frac{4}{3}$ C $\frac{2}{3}$ D $\frac{1}{3}$

4. du tétraèdre de sommet s et de base abc ?

A $\frac{8}{3}$ B $\frac{4}{3}$ C $\frac{2}{3}$ D $\frac{1}{3}$

3 Droites et plans

La droite D est incluse dans un plan P et la droite D′ dans un plan P′.
Choisir la bonne réponse :

1. Quand la droite D est orthogonale à P′, D et D′ sont orthogonales.

A toujours B jamais C parfois

2. Quand la droite D est orthogonale à P′, P et D′ sont orthogonaux.

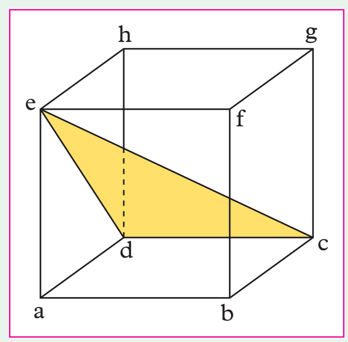
A toujours B jamais C parfois

3. Quand les plans P et P′ sont parallèles, D et D′ sont parallèles.

A toujours B jamais C parfois

4 Intersections

Le cube *abcdefgh* est représenté en fil de fer.



Choisir la bonne réponse :

1. Le plan (cde) coupe la face (abfe) suivant :

A [ab] B [ae] C [ef]

2. Le plan (cde) coupe la face (adhe) suivant :

A [ae] B [de] C [he]

3. Le plan (cde) coupe la face (bcgf) suivant :

A [bf] B [gf] C [cf]

5 Orthogonalité et parallélisme

La droite D est incluse dans un plan P et la droite D′ dans un plan P′.
Choisir la bonne réponse :

1. Quand les plans P et P′ sont parallèles, D et D′ sont parallèles.

A toujours B jamais C parfois

2. Quand la droite D est orthogonale à P′, D et D′ sont parallèles.

A toujours B jamais C parfois

3. Quand la droite D est parallèle à P′, D et D′ sont orthogonales.

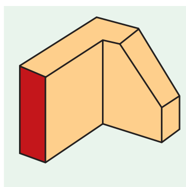
A toujours B jamais C parfois

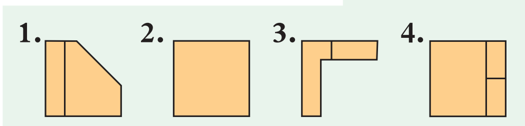
EXERCICES

➜ EXERCICES D'ENTRAÎNEMENT

Changer de vues

1 On a représenté ci-dessous différentes vues de ce solide (vues de face, de dessus, ...). Mettre une légende à chacune d'elles et dire quelle partie aurait dû être colorée en rouge.



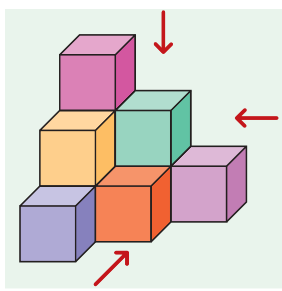


2 CD En empilant des cubes de même taille, on a obtenu la structure ci-contre. Représenter les vues :

a. de face ;

b. de dessus ;

c. de profil.

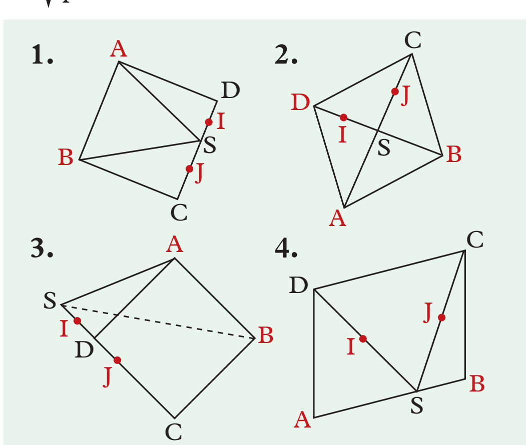


3 **Avec le logiciel Geospace**

• **Avec Geospace**, dans le menu *Fichier*, choisir *Charger une figure* puis dans le répertoire [*Observe*], choisir le fichier *Observe1.g3w*.

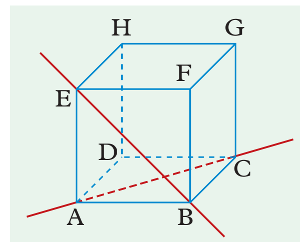
• **Avec Geoplan-Geospace**, dans le menu *Fichier*, choisir *Ouvrir une figure de l'espace* et dans le dossier *Exemples*, choisir *Espace* puis *Observe* et ouvrir le fichier *Observel.g3w*.

Faire tourner la figure en maintenant appuyée la touche Maj (majuscules) et en appuyant sur l'une des six flèches du clavier : ↑ ou ↓ ou ← ou → ou ⇞ ou ⇟ pour obtenir les vues suivantes :

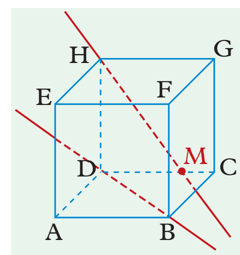


4 CD Les droites dessinées semblent sécantes. Le sont-elles réellement ? (On pourra s'aider d'un cube ou des fichiers du cédérom.)

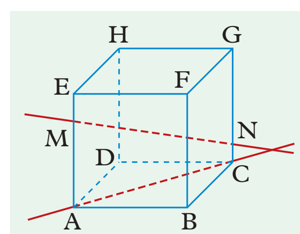
a. (EB) et (AC)



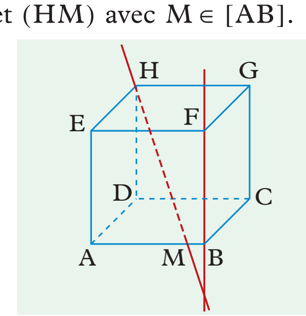
b. (HM) et (DB) avec M ∈ [CD].



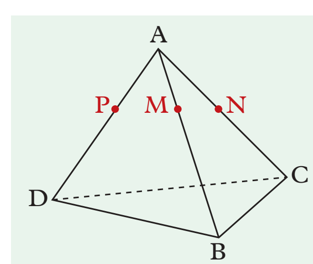
c. (MN) et (AC) avec M ∈ [AE] et N ∈ [CG].



d. (BF) et (HM) avec M ∈ [AB].



5 CD On a placé des points M, N et P sur les arêtes [AB], [AC] et [AD] d'un tétraèdre ABCD. Les points M, N et P sont-ils alignés ?



EXERCICES

Dessiner en perspective cavalière

Pour les exercices 6 à 11, on reproduira la figure ou on utilisera un fond de figure (voir cédérom).

6 CD ABCDEFGH est un cube.

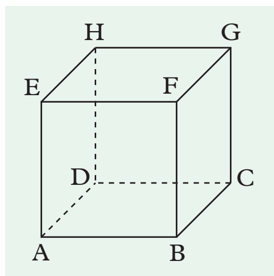
1. Placer :

a. I milieu de [AE] ;

b. O centre du carré ABCD ;

c. le point J de [FG] tel que $FJ = \frac{3}{4} FG$.

2. Tracer les droites (OJ) et (OI).



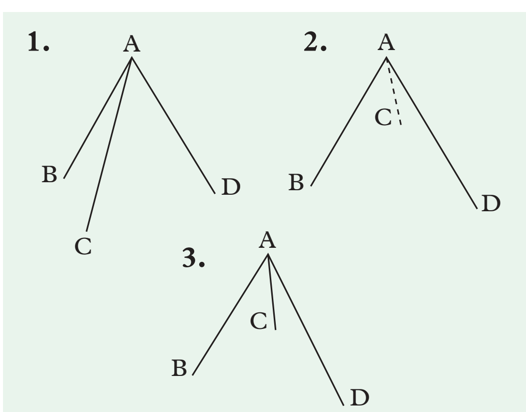
7 CD **1.** Dessiner en perspective cavalière un tétraèdre ABCD.

2. Placer le centre de gravité G du triangle ABC.

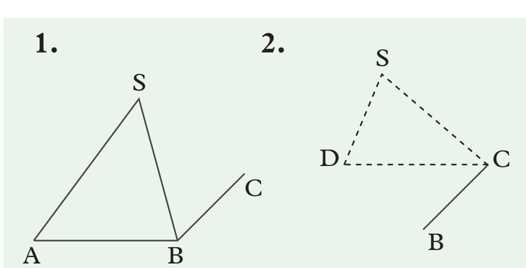
3. Placer le milieu I de [AD].

4. Dessiner la droite (GI).

8 CD Recopier et compléter la figure suivante pour obtenir un tétraèdre ABCD.



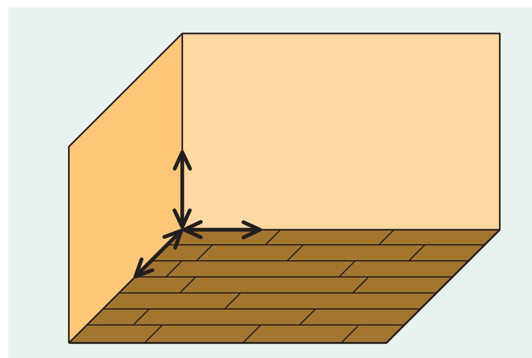
9 CD Recopier et compléter, si possible, la figure pour obtenir une pyramide régulière SABCD à base carrée ABCD.



10 CD CD Dans sa chambre, Arthur veut placer un coffre de longueur 1 m 50, de hauteur 1 m et de largeur 75 cm.

1. Reproduire l'angle de la pièce ci-dessous (chaque flèche correspond à une longueur de 1 m) ou utiliser le fond de figure.

2. On suppose que la pièce a des murs bien droits et perpendiculaires entre eux. Dessiner en perspective le coffre sachant que Arthur veut le placer contre le mur du fond, à 2 m du mur de gauche.

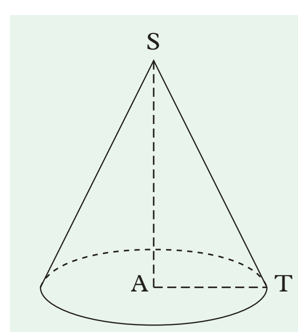


11 CD CD Même exercice que le n° 10 sachant que Arthur place son coffre le long du mur de gauche, à 1 m du mur du fond.

Patrons

12 Dessiner un cylindre de rayon 2 cm et de hauteur 8 cm.
Faire son patron puis calculer son aire latérale.

13 CD Un cône a pour hauteur $SA = 6$ cm et pour rayon $R = AT = 2$ cm.



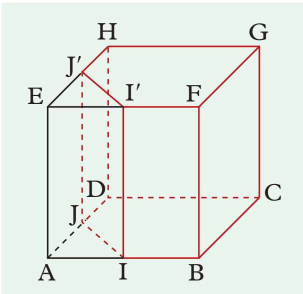
1. Quelle est la nature du triangle SAT ?
Le reproduire en vraie grandeur.

2. Calculer la longueur ST.

3. Calculer une valeur approchée à 0,1 degré près du demi-angle au sommet $\widehat{AST}$.

4. Construire un patron de ce cône.

14 CD ABCDEFGH est un cube d'arête a.
Les points I, I′, J et J′ sont les milieux des arêtes [AB], [EF], [AD] et [EH].

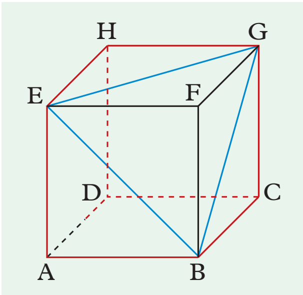


1. On considère le solide rouge IBCDJJ′I′FGH. Combien a-t-il de sommets ? de faces ?

2. En prenant $a = 3$ cm, dessiner un patron du solide IBCDJJ′I′FGH.

3. Calculer son volume en fonction de a.

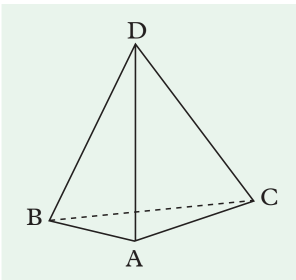
15 CD On considère la portion de cube d'arête a ci-dessous :



1. En prenant $a = 3$ cm, dessiner le patron du solide ABCDEGH.

2. Calculer son volume en fonction de a.

16 CD Un tétraèdre est régulier si ses arêtes ont toutes la même longueur.



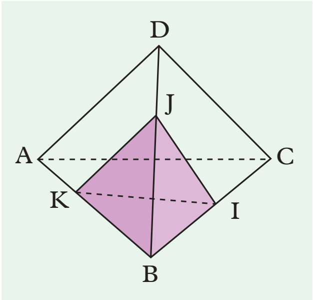
1. Combien a-t-il d'arêtes ? de faces ?

2. Quelle est la nature de chacune de ses faces ?

3. Dessiner un patron d'un tétraèdre régulier dont les arêtes mesurent 4 cm.

17 CD Soit ABCD un tétraèdre régulier dont les quatre faces sont des triangles équilatéraux de côtés 3 cm. On place les points suivants :
- I le milieu de [BC] ;
- J le point de [BD] tel que $DJ = \frac{1}{3}DB$;
- K le point de [AB] tel que $AK = \frac{1}{3}AB$.

On « enlève » le tétraèdre BIJK. Faire le patron (en vraie grandeur) du solide restant.

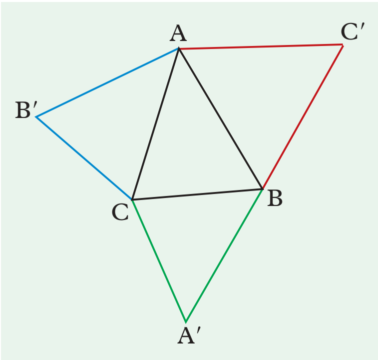


18 CD Thème d'étude **Patron d'un tétraèdre**

La figure ci-dessous est le patron d'un tétraèdre ABCD. Les longueurs étant mesurées en cm, on donne : $AB = 7$; $AC = 6{,}7$; $BC = 5{,}5$ et $AB' = 7$, $BA' = 6{,}5$ et $CB' = 5{,}4$.

1. Déterminer les longueurs des autres côtés.

2. Reproduire la figure et reconstituer (sans le coller) le tétraèdre.



3. Rouvrir le patron et tracer les trois hauteurs des triangles BA′C, AB′C, BC′A issues respectivement de A′, B′ et C′.

4. Vérifier qu'elles semblent sécantes en un point H.

5. À votre avis, à quoi peut correspondre ce point H par rapport au quatrième sommet D du tétraèdre ?

6. Soit P le point d'intersection de (AC) et (B′H), Q celui de (A′H) et (BC), R celui de (AB) et (C′H).

a. Expliquer pourquoi $B'P = DP$.

b. Quelle est la nature du triangle DHP ?
En déduire que $B'P > PH$.

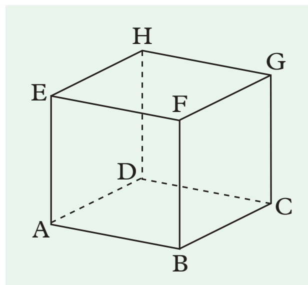
c. Quelles autres inégalités peut-on écrire de façon analogue ?

7. Pour aller plus loin :
Confectionner un autre patron de tétraèdre.

EXERCICES

Positions relatives

19 CD ABCDEFGH est un cube.



1. Citer des droites parallèles à :

a. (AB) ;

b. (AE) ;

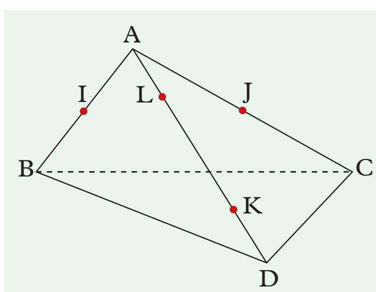
c. (AD).

2. Ces droites sont-elles coplanaires :

a. (AB) et (HG) ?

b. (AC) et (DF) ?

20 CD Une pyramide ABCD est représentée ci-dessous en perspective cavalière.
I est le milieu du segment [AB], J celui de [AC].
Les points K et L sont deux points du segment [AD] distincts de son milieu et de ses extrémités.



1. a. Le point K est-il un point du plan (ACD) ? du plan (BCD) ?

b. L est-il un point du plan (ABD) ? (ABC) ?

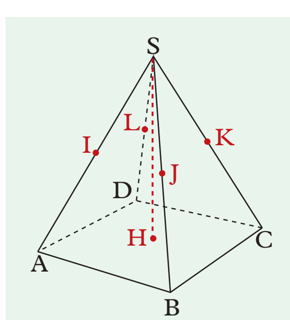
2. Les droites (IK) et (BD) sont-elles dans un même plan ? sont-elles sécantes ?

3. Reprendre la question **2** pour :

a. (AD) et (BC) ; **b.** (JK) et (BC) ;

c. (AB) et (CD) ; **d.** (LJ) et (CD).

21 CD Soit SABCD une pyramide régulière de sommet S et de base carrée ABCD. H est le projeté orthogonal de S sur le plan (ABC).
I, J, K, L sont les milieux respectifs des segments [SA], [SB], [SC], [SD].



1. Citer si c'est possible des droites parallèles à :

a. (AB) ; **b.** (AD) ; **c.** (AS).

2. Citer des droites parallèles au plan (ABC).

22 CD Soit ABCD un tétraèdre.

1. Faire une figure et construire les points :

a. I sur [AB] différent de A et de B ;

b. J sur [AC] tel que (IJ) soit parallèle à (BC).

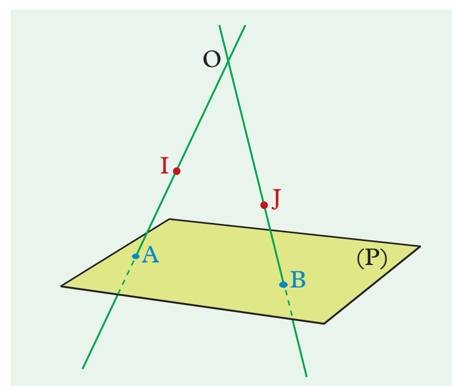
c. K sur [AD] tel que (JK) soit parallèle à (CD).

2. Quelle est la position relative des plans (IJK) et (BCD) ? (Justifier.)

3. En déduire que les droites (IK) et (BD) sont parallèles.

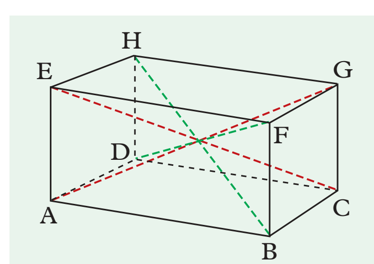
Intersections

23 Sur la figure ci-dessous, les points A et B sont dans un plan (P) et O est extérieur à (P).



Placer l'intersection de la droite (IJ) et de (P).

24 ABCDEFGH est un parallélépipède.



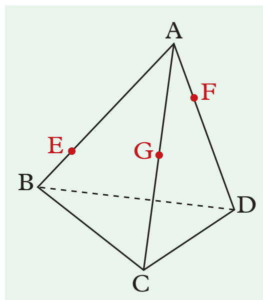
1. Montrer que ACGE et BFHD sont des parallélogrammes.
On note I et J leurs centres respectifs.

2. Montrer que BCHE est un parallélogramme.
Que peut-on en déduire pour [BH] et [CE] ?

3. Que peut-on en déduire pour les quatre diagonales [AG], [BH], [CE] et [DF] de ce parallélépipède ?

25 CD ABCD est un tétraèdre, E est un point de [AB], F un point de [AD] et G un point de [AC] tels qu'aucun des côtés du triangle EFG ne soit parallèle à un côté du triangle BCD.

1. En justifiant leur existence, placer :
- I, intersection de (EF) et (BD) ;
- J, intersection de (EG) et (BC) ;
- K, intersection de (FG) et (CD).

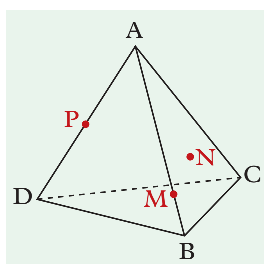


2. a. Citer plusieurs points communs aux plans (EFG) et (BCD).

b. Quelle est l'intersection de ces deux plans ?

c. Qu'en déduit-on pour les points I, J et K ?

26 CD Sur le tétraèdre ABCD on a placé : P sur [AD], M sur [AB], N sur la face ABC dans la position indiquée ci-contre.



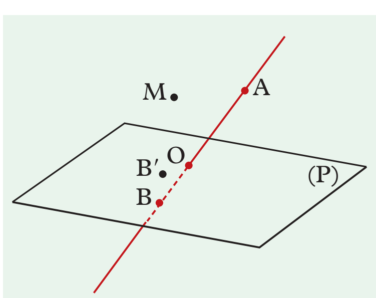
1. Tracer la section du tétraèdre par le plan (MNP).

2. Déterminer l'intersection de (BCD) et (MNP).

27 Plein d'autres tétraèdres !

Ouvrir le logiciel Interesp (fourni avec Geospace) et faire dans l'ordre les exercices suivants :
- page 1 : exercices 1, 2, 3 ;
- page 2 : exercices 1, 2, 3 et 6.

28 CD On considère un plan P, deux points A et B extérieurs à P tels que (AB) coupe P en O. M est un point mobile de l'espace différent de A et B.
On suppose que les droites (AM) et (BM) coupent le plan P respectivement en A′ et B′.



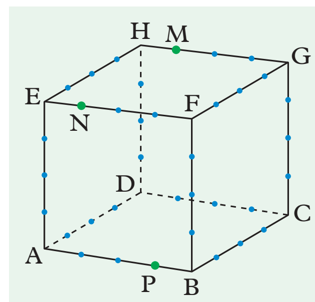
1. Reproduire la figure et construire A′.

2. Montrer que toutes les droites (A′B′) passent par un même point.

3. Que se passe-t-il si (AB) est parallèle à (P) ?

Intersection et parallélisme

29 CD ABCDEFGH est un cube sur lequel on a placé les points situés aux milieux, aux quarts et aux trois-quarts des arêtes. On cherche l'intersection du plan (MNP) avec le cube.



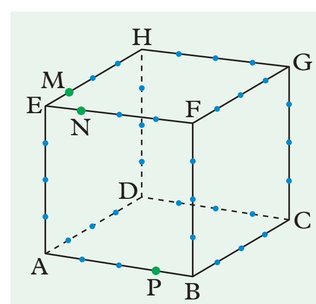
1. Compléter la propriété suivante :
« si deux plans sont parallèles, tout plan sécant à l'un est ..., et les droites d'intersection sont ... »

2. Quelle est l'intersection du plan (MNP) avec la face ABFE ? En déduire l'intersection de (MNP) avec la face DCGH.

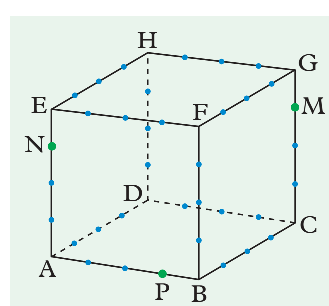
3. Dessiner le section du cube par le plan (MNP).

30 CD Les conventions graphiques sont les mêmes qu'à l'exercice 29 .

Tracer la section du cube par le plan (MNP).



31 CD Les conventions graphiques sont les mêmes qu'à l'exercice 29.



1. Déterminer l'intersection du plan (MNP) avec les faces ABFE et CGHD.

2. Déterminons la section avec la face BCGF :

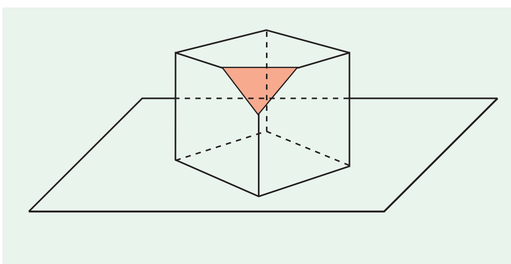
a. Quel point commun au plan (MNP) et à cette face connaît-on ?

b. Citer une droite du plan (MNP) et une droite du plan (BFG) qui sont coplanaires.

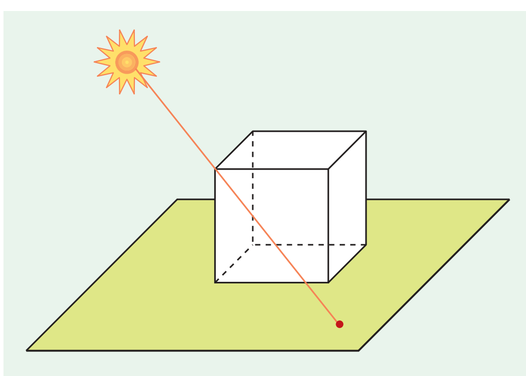
c. En déduire un autre point commun aux plans (MNP) et (BFG). Déterminer leur intersection.

3. Tracer la section du cube par le plan (MNP).

32 CD On a coupé un cube par un plan P pour obtenir la section colorée. Déterminer l'intersection du plan P avec le plan sur lequel est posé le cube.



33 CD Ce cube posé sur un plan est éclairé suivant la direction indiquée par l'ombre d'un de ses sommets. On considère que les rayons du soleil sont parallèles.



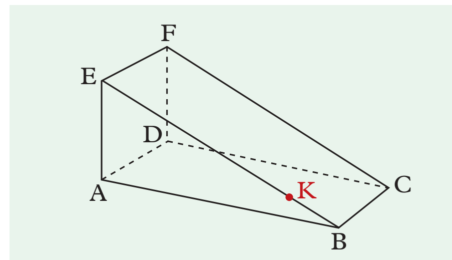
Représenter l'ombre de ce cube sur le plan.

34 CD ABCDEFGH est un cube et I est le milieu de [AE]. Dessiner sur le cube la trace de son intersection avec le plan (P) passant par I et parallèle à (BEG).

Pour les exercices 35 à 38, on utilisera le résultat de l'exercice d'application 10 page 285 (théorème du toit).

35 Une droite (d) est parallèle aux plans sécants (P) et (Q). Montrer que (d) est parallèle à la droite d'intersection de (P) et (Q).

36 CD On considère le solide suivant (demi-parallélépipède rectangle). K est un point de [EB] autre que E et B.

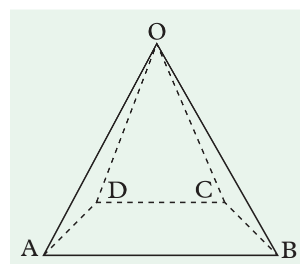


On cherche l'intersection de (EFC) et (ADK).

1. Quel point commun leur connaît-on ?

2. Dessiner, en justifiant, l'intersection du plan (ADK) avec le plan (EFC).

37 CD OABCD est une pyramide dont la base ABCD est un trapèze avec [AB] parallèle à [CD].

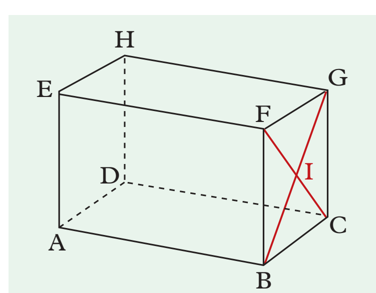


Tracer l'intersection des plans :

a. (OAD) et (OBC) ; **b.** (OAB) et (ODC).

38 CD ABCD est un tétraèdre. On place I milieu de [AB], J milieu de [AC] et K sur [AD], distinct du milieu de [AD], de A et de D.
Déterminer l'intersection des plans (IJK) et (BCD).

39 CD Soit ce pavé droit, I est le centre du rectangle BCGF.



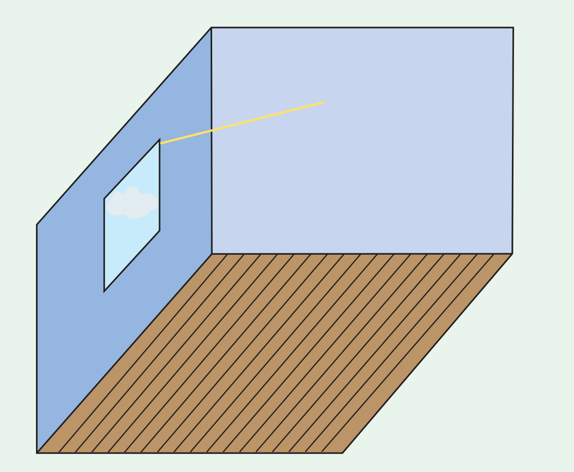
Déterminer la droite d'intersection du plan (ABG) et du plan passant par C et contenant la droite (AF).

40 CD CD **L'ombre de la fenêtre**

Le soleil entre à flot dans la pièce et redessine la forme de la fenêtre sur le mur du fond. On considère que les rayons du soleil sont parallèles. On a déjà tracé l'ombre de l'un des coins de la fenêtre sur le mur du fond.

1. Reproduire à l'aide d'un calque le dessin ci-dessous (ou utiliser le fond de figure).

2. Dessiner l'ombre de la fenêtre sur le mur du fond.



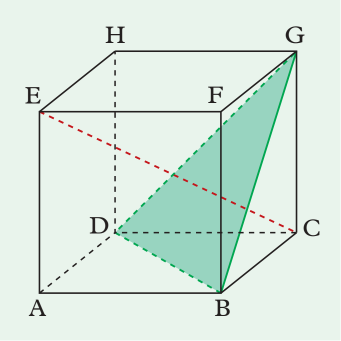
Orthogonalité

41 La figure est celle de l'exercice 19.
Citer des droites orthogonales à :
a. (AB) ; **b.** (AE) ; **c.** (AD).

42 La figure est celle de l'exercice 21.
Si elles existent, citer des droites orthogonales à :
a. (AB) ; **b.** (AD) ; **c.** (HS).

43 CD **Aide à la démonstration**

ABCDEFGH est un cube. On souhaite démontrer que la droite (EC) est orthogonale au plan (DBG).



1. On souhaite prouver que (EC) et (DG) sont orthogonales. Justifier chacune des étapes à l'aide d'un des outils de la « boîte à outils » donnée à la fin de l'exercice.
Étape 1 : (DG) et (HC) sont orthogonales.
Étape 2 : (EH) est orthogonale au plan (DHG).
Étape 3 : (EH) est orthogonale à (DG).
Étape 4 : (DG) est orthogonale au plan (EHC).
Étape 5 : (EC) et (DG) sont orthogonales.

2. On souhaite montrer de même que (BG) et (EC) sont orthogonales.
Pour cela on va montrer que (BG) est orthogonale à un plan contenant (EC) : lequel ?
Écrire les différentes étapes de la démonstration comme dans la question **1**.

3. Justifier que (EC) est orthogonale au plan (BDG).

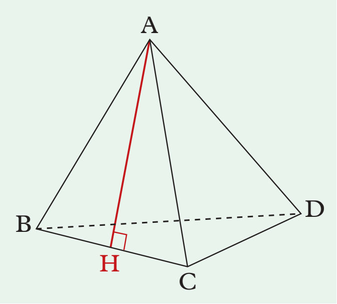
Boîte à outils :
(1) Propriétés du carré.
(2) Propriétés du cube.
(3) Une droite est orthogonale à un plan si elle est orthogonale à toute droite de ce plan.
(4) Une droite orthogonale à deux droites sécantes d'un plan est orthogonale à ce plan.
(5) Une droite orthogonale à un plan est orthogonale à toute droite de ce plan.

44 Soit ABCD un carré situé dans un plan (P). Soit M un point de la perpendiculaire à (P) passant par A (distinct de A). Montrer que :

a. (MA) est orthogonale à (DB) ;

b. (DB) est orthogonale à (MC).

45 CD Soit ABCD un tétraèdre régulier. Soit H le pied de la hauteur issue de A du triangle ABC.



1. Montrer que (DH) est la hauteur issue de D du triangle BCD.

2. Montrer que (BC) est orthogonale à (ADH).

3. En déduire que (BC) et (AD) sont orthogonales.

EXERCICES

46 CD Soit ABCD un tétraèdre tel que $AB = AC$ et $DB = DC$; I le milieu de $[BC]$.

1. Montrer que (AI) et (BC) sont orthogonales.

2. Montrer que (DI) et (BC) sont orthogonales.

3. En déduire que (BC) est orthogonale à (AD).

Calculs de grandeurs dans l'espace

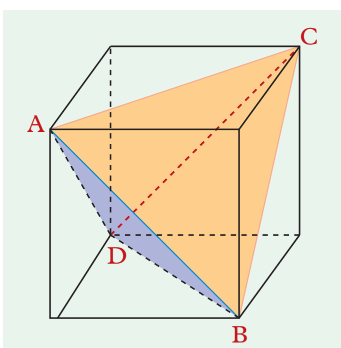
47 CD Soit un cube ABCDEFGH de côté 2 cm.

1. a. Calculer la longueur de la diagonale d'une face.

b. En déduire la longueur de la diagonale AG.

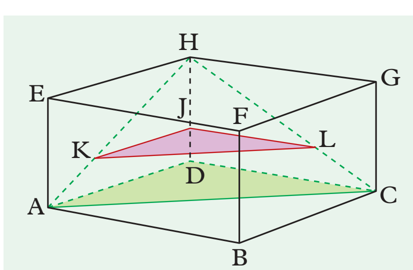
2. Reprendre la question **1** avec un cube de côté a.

48 Montrer que les quatre sommets du cube ci-dessous forment un tétraèdre régulier.



49 CD **Pyramides et fonctions**

ABCDEFGH est un parallélépipède rectangle. $AB = 7$, $BC = 6$ et $AE = 4$ (unité : 1 cm).



1. a. Quelle est la nature du triangle ADC ?

b. Calculer son périmètre P et son aire S.

J est un point de $[DH]$; on coupe la pyramide HDAC par le plan passant par J et parallèle à la base ACD pour obtenir le triangle JKL.

On note x la distance HJ, $p(x)$ le périmètre du triangle JKL et $a(x)$ son aire.

2. a. À quel intervalle appartient x ?

b. Dessiner en vraie grandeur la face DCGH en prenant (pour le dessin seulement) $x = 1{,}5$.

c. Exprimer en fonction de x le rapport de réduction de DAC à JKL.

d. En déduire $p(x)$ et $a(x)$ en fonction de x.

3. Tracer les courbes représentant p et a.

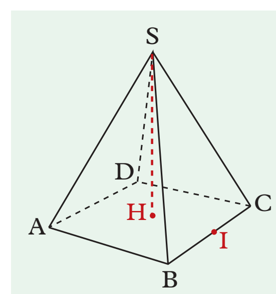
4. Déterminer pour quelles valeurs de x on a :

a. $p(x) \geqslant \frac{1}{2}\,\mathrm{P}$; **b.** $a(x) \geqslant \frac{1}{2}\,\mathrm{S}$.

50 CD Soit ABCD un tétraèdre dont les faces contenant A sont des triangles rectangles en A. On donne $BC = 10$; $BD = 12$ et $CD = 14$. Calculer AB, AC et AD.

51 CD Soit SABCD une pyramide régulière à base carrée.

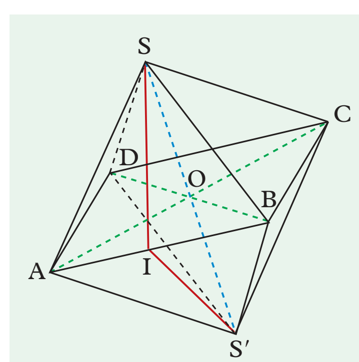
On note H le projeté orthogonal de S sur (ABC) et I le milieu de $[BC]$.



1. On suppose que : $AB = 2$ cm et $SH = 4$ cm. Calculer SI puis SB.

2. Reprendre la question **1** avec $AB = a$ et $SH = 2a$.

52 CD Soit un octaèdre SABCDS′ de centre O formé de huit triangles équilatéraux identiques de côtés 10 cm. I est le milieu de $[AB]$.

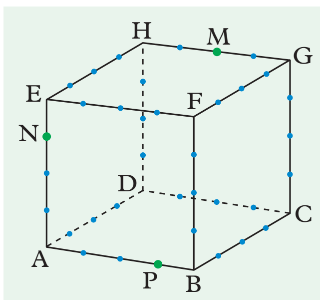


1. Calculer OI, SI et SO ; en déduire la hauteur SS′ de l'octaèdre.

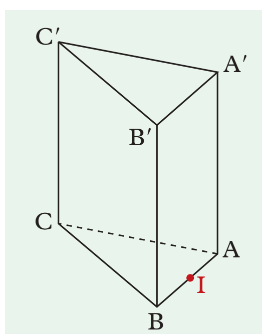
2. Donner une mesure en degrés à 10^{-2} près de l'angle $\widehat{SIS'}$.

→ EXERCICES D'APPROFONDISSEMENT

53 CD Sur le cube ABCDEFGH, on a marqué les points situés aux quart, demi, trois-quarts des arêtes. Déterminer la section du cube par le plan (MNP).



54 CD ABCA′B′C′ est un prisme droit et I est le milieu de [AB]. Déterminer l'intersection de la droite parallèle à (BC′) et passant par I avec le plan (ACC′).

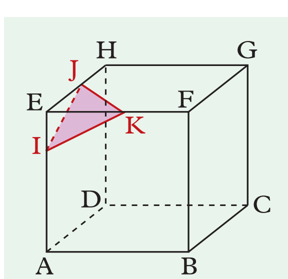


55 CD Soit un plan (P) et une droite (Δ) sécants en un point I.

1. Placer sur (Δ) deux points J et K de part et d'autre de I. Soit M un point n'appartenant ni à (P) ni à (Δ), dessiner (MJ) et (MK).

2. On appelle A le point d'intersection de (MJ) et (P), s'il existe, et B le point commun à (MK) et (P).
Montrer que A, I et B sont alignés.

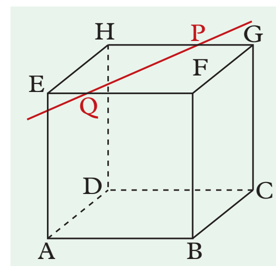
56 CD Dans le cube ABCDEFGH, I appartient à [EA], J à [EH] et K à [EF].



Déterminer l'intersection des plans (IJK) et (DHG).

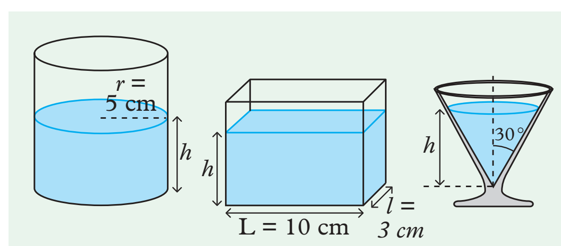
Pour chercher

57 CD Les points P et Q appartiennent aux arêtes [GH] et [EF] d'un cube. Comment tracer la droite de (EFG) passant par H et orthogonale à (PQ) ?



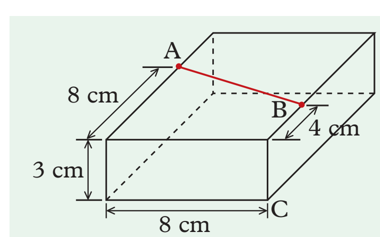
Indication : construire l'intersection I de (PQ) et (HF) puis travailler dans le triangle HIP.

58 CD **Qui contient le plus de liquide ?**
On verse une même hauteur h de liquide (en cm) dans chacun des récipients suivants :



Quel récipient contiendra le plus de liquide ?

59 CD On scie le parallélépipède rectangle en bois ci-dessous suivant un plan de coupe qui contient le segment [AB] et qui passe par le sommet C.



1. Représenter les intersections de ce plan de coupe avec les faces de cet objet.

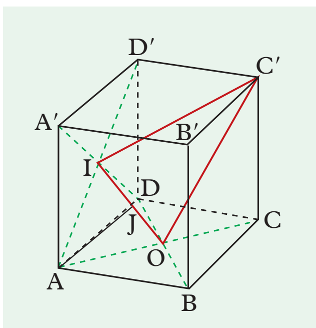
2. Représenter la section en vraie grandeur.

Extrait de Rallye de la Réunion.

EXERCICES

→ PROBLÈMES

60 CD ABCDA′B′C′D′ est un cube de côté 4 cm, I et O sont les centres des carrés ADD′A′ et ABCD.



1. Calcul de OI

a. Montrer que le triangle ACD′ est équilatéral et calculer la longueur de son côté.

b. Montrer que les droites (OI) et (D′C) sont parallèles. En déduire OI.

2. Calcul de OC′

a. Montrer que OCC′ est rectangle en C.

b. Calculer OC′.

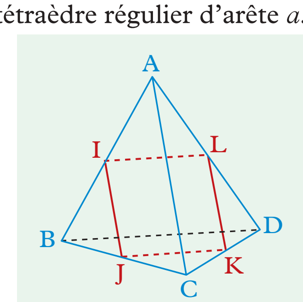
3. Calculer IC′.

4. Soit J le milieu de [OI].
Calculer C′J puis AJ puis AC′.

5. a. Les points A, J et C′ sont-ils alignés ?

b. Quelle est la position de [OI] et (AJC) ?

61 CD ABCD est un tétraèdre régulier d'arête a.
On appelle I, J, K et L les milieux respectifs des arêtes [AB], [BC], [CD], [DA].
On veut montrer que IJKL est un carré et calculer son aire.



1. a. Montrer que les droites (IJ) et (AC) sont parallèles, calculer IJ en fonction de a.

b. Montrer que IJKL est un losange.

2. Soit M le milieu de [BD].

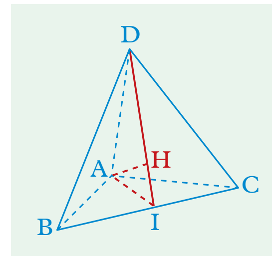
a. Montrer que les droites (CM) et (BD) sont orthogonales ainsi que (AM) et (BD).

b. En déduire que (AC) est orthogonale à (BD) puis que (IJ) est orthogonale à (IL).

c. Montrer que IJKL est un carré.

3. Calculer l'aire de IJKL en fonction de a.

62 CD ABCD est un tétraèdre dont les faces BAC, CAD et DAB sont trois triangles rectangles isocèles en A.
On note H l'orthocentre du triangle BCD.



1. Quelle est la nature du triangle BCD ?

2. Montrer que (DA) et (BC) sont orthogonales.

3. Montrer que la droite (BC) est orthogonale au plan (DAH) et donc à (AH).

4. Montrer de la même manière que (CD) est orthogonale à (BAH) puis en déduire que (AH) est orthogonale au plan (BCD).

5. On suppose que AB = AC = AD = 4 cm.

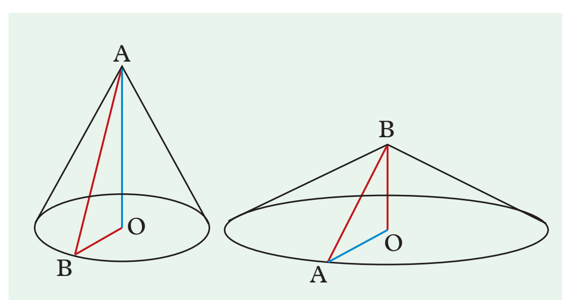
a. Calculer en cm^3 le volume V du tétraèdre.

b. Faire une figure de la face BCD en vraie grandeur. Calculer son aire S en cm^2.

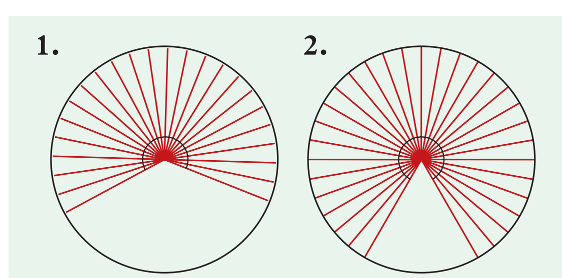
c. Exprimer V en fonction de S et de AH. En déduire AH.

63 CD **Cônes, aires et volumes**

On considère un triangle AOB rectangle en O avec AO = 4 cm et OB = 3 cm. En faisant tourner ce triangle autour de la droite (OA) ou autour de la droite (OB), on obtient deux cônes différents représentés avec leurs patrons :



cône C_A d'axe (OA) cône C_B d'axe (OB)



1. Des deux cônes, quel est celui qui vous semble :

a. avoir le volume le plus grand ?

b. avoir l'aire latérale la plus grande ?

2. Déterminer les volumes V_A et V_B des cônes C_A et C_B. Déterminer le rapport $\frac{V_A}{V_B}$.

3. Déterminer pour chacun des deux cônes le périmètre du cercle de base.

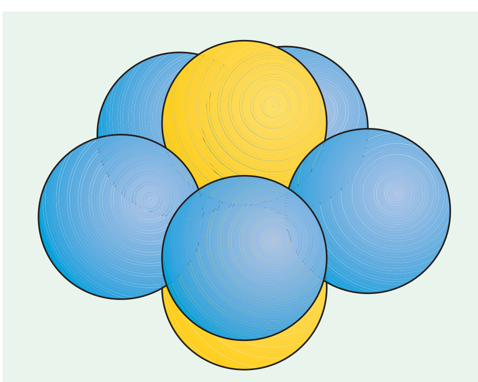
4. a. Déterminer parmi ces deux patrons de cônes, celui du cône C_A, celui du cône C_B.

b. La longueur d'un arc de cercle est égale à $R\alpha$, où α désigne l'angle au centre (en radians) interceptant cet arc de cercle et R le rayon du cercle. Déduire de la question **a**, pour chacun des deux patrons, la mesure en radians de l'angle rentrant hachuré.

5. On admet que l'aire latérale d'un cône est égale à $\alpha \frac{R^2}{2}$ avec $R = AB$ et α l'angle rentrant hachuré.

Déterminer les aires latérales S_A et S_B des deux cônes C_A et C_B puis le rapport $\frac{S_A}{S_B}$. Comparer avec le résultat obtenu à la question **3**.

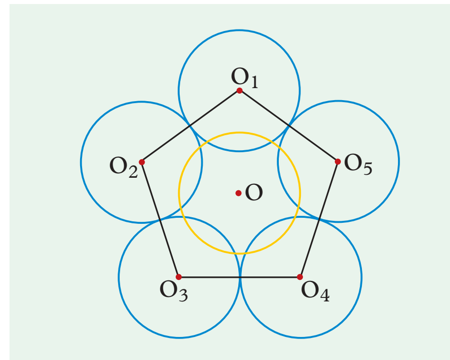
64 **CD** On dispose de 7 boules de diamètre 6 cm, 5 bleues et 2 jaunes que l'on assemble ainsi :



Les centres des boules bleues sont dans un même plan ; chaque boule bleue est tangente à ses voisines ; chacune des deux boules jaunes est tangente aux cinq boules bleues.

On observe que les deux boules jaunes se retrouvent très proches l'une de l'autre... Cherchons à quelle distance exactement.

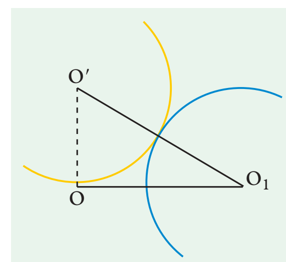
En vue de dessus, c'est-à-dire en projection orthogonale dans le plan contenant les centres O_1, O_2, O_3, O_4, O_5 des cinq boules bleues, on obtient le schéma suivant où $O_1O_2O_3O_4O_5$ est un pentagone régulier de centre O :



1. Déterminer une mesure en radian de $\widehat{O_1OO_2}$.

2. En déduire que $OO_1 = \frac{3}{\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)}$.

3. O est le projeté orthogonal du centre O′ de la boule jaune du dessus.

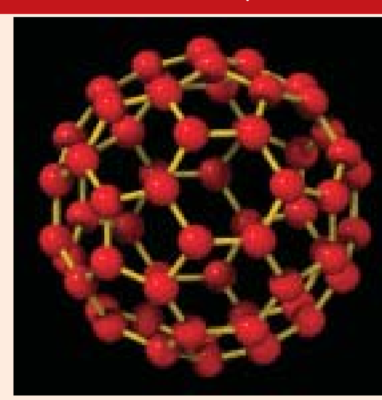


a. Calculer OO'.

b. En déduire au mm près la distance séparant les deux boules jaunes.

D'après Rallye de la Réunion

Point info



Découverts en 1985, les **fullerènes** sont des molécules composées d'atomes de carbone. Leur structure est formée d'anneaux pentagonaux, hexagonaux et parfois heptagonaux. Ci-dessus est représenté le fullerène C_{60}. Sa structure est identique à celle d'un ballon de football, avec 12 pentagones et 20 hexagones, chaque atome de carbone étant situé à l'un des 60 sommets d'un polyèdre inscrit dans une sphère.

Soyez curieux : pourquoi ce nom de fullerène en hommage à l'architecte Richard Buckminster Fuller ?