Contrôle :
Développements limités et intégrales

Exercice 1
Donner le DL3(0) de :
$e(x) = 8 + x - 4x^2 - 5x^3 + 6x^2 + 2x^4$
$f(x) = \cos(3x)$
$g(x) = \ln(1 + x) + x - 4x^2 - 5x^7$
$h(x) = \frac{1}{1+x} \times \sin(x)$

Exercice 2
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{1+x^2} - 2e^{-x}$.
Sa courbe représentative sera nommée C

1) Prouvez que le DL3(0) de f(x) est $-1 + 2x - 2x^2 + \frac{x^3}{3} + x^3\varepsilon(x)$ avec $\lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$
2) En déduire l'équation de T la tangente à C au point d'abscisse 0
3) Donner la position de la courbe par rapport à la tangente, avant 0 et après 0.

Devoir Maison pour le Mercredi 23 Février

Exercice 1
En utilisant une ou deux intégrations par partie calculez les intégrales suivantes

$$I = \int_1^2 x^2 \ln(x)\, dx$$
$$J = \int_1^2 (x^2 - 5x + 2)e^{2x} dx$$
$$K = \int_0^\pi \cos(x)\, e^{5x} dx$$

Exercice 2
A l'aide du changement de variable x = 2t – 1 calculez

$$I = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}} \frac{1}{\sqrt{4t - 4t^2}} dt$$

A l'aide du changement de variable u = sin(x) calculez

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos(x)\, dx}{1 + sin^2(x)}$$

conseil : commencez par determiner du, puis les bornes et enfin la fonction .

Contrôle :développements limités

Exercice 1

Donner le DL3(0) de :
$e(x) = 8 + x - 4x^2 - 5x^3 + 6x^2 + 2x^4 = 8 + x + 2x^2 - 5x^3 + x^3 2x$
En posant $\varepsilon(x) = 2x$ on a : $e(x) = 8 + x + 2x^2 - 5x^3 + x^3\varepsilon(x)$ avec $\lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$

$f(x) = \cos(3x)$ $\cos(t) = 1 - \frac{t^2}{2!} + t^3\varepsilon(t)$ avec $\lim_{x\to 0} \varepsilon(x)$ donc en posant t = 3x on aura :
$\cos(3x) = 1 - \frac{(3x)^2}{2!} + (3x)^3\varepsilon(3x) = 1 - \frac{9}{2}x^2 + x^3 27\varepsilon(3x)$ en posant $\varepsilon_0(x) = 27\varepsilon(3x)$
$\lim_{x\to 0} 3x = 0$ et $\lim_{t\to 0} \varepsilon(t) = 0$ donc $\lim_{x\to 0} \varepsilon_0(x) = \lim_{x\to 0} 27\varepsilon(3x) = 0$ et donc
$f(x) = 1 - \frac{9}{2}x^2 + x^3\varepsilon_0(x)$ avec $\lim_{x\to 0} \varepsilon_0(x) = 0$

$g(x) = \ln(1 + x) + x - 4x^2 - 5x^7$
$= x - \frac{x}{2} + \frac{x^3}{3} + x^3\varepsilon(x) + x - 4x^2 - 5x^7$
$= 2x - 4{,}5x + \frac{x^3}{3} + x^3(\varepsilon(x) - 5x^4)$ avec $\lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$
En posant $\varepsilon_0(x) = \varepsilon(x) - 5x^4$ on a $\lim_{x\to 0} \varepsilon_0(x) = \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) - 5x^4 = 0$
Et ainsi on aura : $g(x) = 2x - 4{,}5x + \frac{x^3}{3} + x^3\varepsilon_0(x)$ avec $\lim_{x\to 0} \varepsilon_0(x) = 0$

$h(x) = \frac{1}{1+x} \times \sin(x) = \left(1 - x + x^2 - x^3 + x^3\varepsilon_1(x)\right)\left(x - \frac{x^3}{3!} + x^3\varepsilon_2(x)\right)$
avec $\lim_{x\to 0} \varepsilon_1(x) = 0$ et $\lim_{x\to 0} \varepsilon_2(x) = 0$
les termes négligeables devant x^3 (comme $x^4, x^5, \dots, x^3\varepsilon_2(x)$) seront remisés dans $x^3\varepsilon(x)$ et on aura alors $\lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$
$h(x) = x - \frac{x^3}{3!} + x^3\varepsilon(x) - x^2 = x - x^2 - \frac{x^3}{3!} + x^3\varepsilon(x)$ avec $\lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$

Exercice 2

Soit f la fonction définie sur $]-\infty; +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{1+x^2} - 2e^{-x}$
$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - t^3 + t^3\varepsilon_1(t)$ avec $\lim_{t\to 0} \varepsilon_1(t) = 0$ Donc en posant t = x² on aura : $\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^6\varepsilon_1(x^2)$
$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + t^3\varepsilon_2(t)$ avec $\lim_{t\to 0} \varepsilon_2(t) = 0$
Donc en posant t = -x on aura : $e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} - x^3\varepsilon_2(-x)$
Ainsi : $f(x) = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^6\varepsilon_1(x^2) - 2\left(1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} - x^3\varepsilon_2(-x)\right)$
$= -1 + 2x - 2x^2 + \frac{x^3}{3} + x^3\left(2\varepsilon_2(-x) + x - x^3 + x^3\varepsilon_1(x^2)\right)$ et en posant
$\varepsilon(x) = 2\varepsilon_2(-x) + 1 - x^3 + x^3\varepsilon_1(x^2)$
Vu que, $\lim_{t\to 0} -t = 0$, $\lim_{t\to 0} t^2 = 0$, $\lim_{t\to 0} \varepsilon_1(t) = 0$ et $\lim_{t\to 0} \varepsilon_2(t) = 0$ on aura :
$\lim_{t\to 0} \varepsilon(t) = \lim_{t\to 0}\left(2\varepsilon_2(-x) + x - x^3 + x^3\varepsilon_1(x^2)\right) = 0$
Et donc $(x) = -1 + 2x - 2x^2 + \frac{x^3}{3} + x^3\varepsilon(t)$.

2) L'équation de la tangente est donnée par la partie régulière du DL1(0) de f
Ainsi y = -1 + 2x
3) f(x) – y = $= -1 + 2x - 2x^2 + \frac{x^3}{3} + x^3\varepsilon(t) - (-1 + 2x) = \frac{x^3}{3} + x^3\varepsilon(t)$
Le signe de la différence est donné par$-2x^2$ (qui sera toujours négatif) et donc la courbe sera sous la tangente avant et après 0.

Devoir Maison

Exercice 1

Nous utiliserons la formule suivante : $\int u'v = [uv] - \int uv'$

$$I = \int_1^2 x^2 \ln(x)\, dx$$

En posant $u'(x) = x^2$ et $v(x) = \ln(x)$ on aura : $u(x) = \frac{x^3}{3}$ et $v'(x) = \frac{1}{\mathrm{x}}$ et donc

$I = \left[\frac{x^3}{3}\ln(x)\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{x^3}{3}\frac{1}{\mathrm{x}}dx \ = \frac{8}{3}\ln(2) - 0 - \left[\frac{x^3}{9}\right]_1^2 = \frac{8}{3}\ln(2) - \frac{8}{9} + \frac{1}{9} = \frac{8\ln(2)}{3} - \frac{7}{9}$

$$J = \int_1^2 (x^2 - 5x + 2)e^{2x} dx$$

En posant $u'(x) = e^{2x}$ et $v(x) = x^2 - 5x + 2$ on aura : $u(x) = \frac{e^{2x}}{2}$ et $v'(x) = 2\mathrm{x} - 5$ et donc

$J = \left[\frac{e^{2x}}{2}(x^2 - 5x + 2)\right]_1^2 - \int_1^2 (2\mathrm{x} - 5)\frac{e^{2x}}{2}dx \ = \frac{e^4}{2}(-4) - \frac{e^2}{2}(-2) - \int_1^2 (2\mathrm{x} - 5)\frac{e^{2x}}{2}dx$

En posant $u'(x) = \frac{e^{2x}}{2}$ et $v(x) = 2\mathrm{x} - 5$ on aura : $u(x) = \frac{e^{2x}}{4}$ et $v'^{(x)} = 2$ et donc

$J = -2e^4 + e^2 - \left(\left[\frac{e^{2x}}{4}(2\mathrm{x} - 5)\right]_1^2 - \int_1^2 2\frac{e^{2x}}{4}dx\right) = -2e^4 + e^2 - \left(\frac{e^4}{4}(-1) - \frac{e^2}{4}(-3) - \left[\frac{e^{2x}}{4}\right]_1^2\right)$

$= -2e^4 + e^2 - \left(-\frac{e^4}{4} + \frac{3e^2}{4} - \frac{e^4}{4} + \frac{e^2}{4}\right) = -2e^4 + e^2 + \frac{e^4}{4} - \frac{3e^2}{4} + \frac{e^4}{4} - \frac{e^2}{4} = -1{,}5e^4$

$$K = \int_0^\pi \cos(x)\, e^{5x} dx$$

En posant $u'(x) = \cos(x)$ et $v(x) = e^{5x}$ on aura : $u(x) = \sin(x)$ et $v'(x) = 5e^{5x}$ et donc

$K = [\sin(x)e^{5x}]_0^\pi - \int_0^\pi \sin(x)5e^{5x}dx \ = \sin(0)\, e^0 - \sin(\pi)\, e^{5\pi} - \int_0^\pi \sin(x)5e^{5x}dx \ = -\int_0^\pi \sin(x)5e^{5x}dx$

En posant $u'(x) = \sin(x)$ et $v(x) = 5e^{5x}$ on aura : $u(x) = -\cos(x)$ et $v'(x) = 25e^{5x}$ et donc

$K = -\left([-\cos(x)\, 5e^{5x}]_0^\pi - \int_0^\pi -\cos(x)\, 25e^{5x}dx\right)$

$= -\left(-\cos(\pi)\, 5e^{5\pi} + \cos(0)5e^0 + 25\int_0^\pi \cos(\mathrm{x})\, e^{5x}dx\right) = -5e^{5\pi} - 5 - 25K$

Donc $26K = -5 - 5e^{5\pi}$ et donc $K = \frac{-5}{26}(1 + e^{5\pi})$

Exercice 2

A l'aide du changement de variable x = 2t – 1 calculez $I = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}} \frac{1}{\sqrt{4t - 4t^2}}dt$

Si t=$\frac{1}{2}$ alors x = 0 si $t = \frac{3}{4}$ alors x=$\frac{1}{2}$

x = 2t – 1 $t = \frac{x+1}{2}$ donc $dt = \frac{1}{2}dx$

$\frac{1}{\sqrt{4t-4t^2}} = \frac{1}{\sqrt{4\frac{x+1}{2} - 4\left(\frac{x+1}{2}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2x+2-x^2-2x-1}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Donc $I = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\frac{dx}{2} \ = \left[\frac{\mathrm{Arcsin(x)}}{2}\right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{\pi}{6}}{2} - \frac{0}{2} = \frac{\pi}{12}$

A l'aide du changement de variable u = sin(x) calculez $J = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos(x)dx}{1+sin^2(x)}$

Si $x = 0$ alors u = $sin(0) = 0$ Si $x = \frac{1}{2}$ alors u = $sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$

u = sin(x) donc $du = \cos(x)\, dx$

$\frac{1}{1+sin^2(x)} = \frac{1}{1+u^2}$

Donc $J = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{du}{1+u^2} \ = [\mathrm{Arctan(u)}]_0^{\frac{1}{2}} = \mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{2}\right) - \mathrm{Arctan}(0) = \mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{2}\right)$