Correction de développements limités

Exercice 1.

a) $f(x)=(1+x)^3=1+3x+3x^2+x^3$

b) $DL_1(0)$: $f(x)=1+3x+x\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x\to 0}\varepsilon(x)=0$

En effet $\varepsilon(x)=\frac{f(x)-1-3x}{x}=\frac{1+3x+3x^2+x^3-1-3x}{x}=\frac{3x^2+x^3}{x}=3x+x^2$

$DL_2(0)$: $f(x)=1+3x+3x^2+x^2\delta(x)$ avec $\lim\limits_{x\to 0}\delta(x)=0$, en effet $\delta(x)=\frac{f(x)-1-3x-3x^2}{x^2}=\frac{x^3}{x^2}=x$

$DL_3(0)$: $f(x)=1+3x+3x^2+x^3+x^3\lambda(x)$ avec $\lim\limits_{x\to 0}\lambda(x)=0$, en effet $\lambda(x)=0$

Exercice 2.

$g(x)=(x-4)(9x^2-6x+1)=9x^3-6x^2+x-36x^2+24x-4=-4+25x-42x^2+9x^3$

$DL_1(0)$: $g(x)=-4+25x+x\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x\to 0}\varepsilon(x)=0$

$DL_2(0)$: $g(x)=-4+25x-42x^2+x^2\varepsilon(x)$

$DL_3(0)$: $g(x)=-4+25x-42x^2+9x^3+x^3\varepsilon(x)$

Exercice 3.

$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+x^3\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x\to 0}\varepsilon(x)=0$, on pose $x=-t$ donc $f(t)=\frac{1}{1-t}=1-(-t)+(-t)^2-(-t)^3+(-t)^3\varepsilon(-t)=1+t+t^2+t^3+t^3\varepsilon(t)$ avec $\lim\limits_{x\to 0}\varepsilon(x)=0$,

$\ln(1+t)=t-\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{3}+t^3\varepsilon(t)$ avec $\lim\limits_{x\to 0}\varepsilon(x)=0$, on pose $x=-t$ donc $g(t)=\ln(1-t)=-t-\frac{t^2}{2}-\frac{t^3}{3}+t^3\varepsilon(t)$

Exercice 4.

$e^t=1+t+\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{6}+t^3\varepsilon(t)$ avec $\lim\limits_{x\to 0}\varepsilon(x)=0$ donc $e^{-t}=1-t+\frac{t^2}{2}-\frac{t^3}{6}+t^3\varepsilon(t)$

Exercice 5. Somme

$\ln(1+t)=t-\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{3}+t^3\varepsilon(t)$ et $e^t=1+t+\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{6}+t^3\varepsilon(t)$ donc $f(x)=\ln(1+x)+e^x=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+x^3\varepsilon(x)=1+2x+\frac{x^3}{2}+x^3\varepsilon(x)$.

Exercice 6. Différence

$\ln(1+t)=t-\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{3}-\frac{t^4}{4}+t^4\varepsilon(t)$ et $\sin t=t-\frac{t^3}{6}+t^4\varepsilon(t)$

$$g(x)=t-\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{3}-\frac{t^4}{4}-3\left(t-\frac{t^3}{6}\right)+t^4\varepsilon(t)=-2t-\frac{t^2}{2}+\frac{5t^3}{6}-\frac{t^4}{4}+t^4\varepsilon(t)$$

Exercice 7.

$(1+t)^\alpha=1+\alpha t+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}t^2+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{6}t^3+t^3\varepsilon(t)$ avec $\lim\limits_{x\to 0}\varepsilon(x)=0$

$\sqrt{1+t}=(1+t)^{\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}t-\frac{1}{8}t^2+\frac{3}{48}t^3+t^3\varepsilon(t)$ avec $\lim\limits_{x\to 0}\varepsilon(x)=0$

$\sqrt{1-t}=1-\frac{1}{2}t-\frac{1}{8}t^2-\frac{3}{48}t^3+t^3\varepsilon(t)$ avec $\lim\limits_{x\to 0}\varepsilon(x)=0$

$$g(t)=e^t-\sqrt{1-t}=1+t+\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{6}-1+\frac{1}{2}t+\frac{1}{8}t^2+\frac{3}{48}t^3+t^3\varepsilon(t)$$

$$e^t-\sqrt{1-t}=\frac{3}{2}t+\frac{5}{8}t^2+\frac{11t^3}{48}+t^3\varepsilon(t)$$

donc $\lim\limits_{t\to 0}\frac{e^t-\sqrt{1-t}}{t}=\lim\limits_{t\to 0}\frac{\frac{3}{2}t+\frac{5}{8}t^2+\frac{11t^3}{48}+t^3\varepsilon(t)}{t}=\lim\limits_{t\to 0}\left(\frac{3}{2}+\frac{5}{8}t+\frac{11t^2}{48}+t^2\varepsilon(t)\right)=\frac{3}{2}$

Exercice 8. Produits

$e^{-t} = 1 - t + \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{6} + t^3\varepsilon(t)$ donc $f(x) = (x+2)\left(1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon(x)\right) = x - x^2 + \frac{x^3}{2} - \frac{x^4}{6} +$
$x^4\varepsilon(x) + 2 - 2x + x^2 - \frac{x^3}{3} + x^3\varepsilon(x)$

On peut négliger les termes en x^4 car ils peuvent être inclus dans $x^3\varepsilon(x)$

donc $f(x) = x - x^2 + \frac{x^3}{2} + 2 - 2x + x^2 - \frac{x^3}{3} + x^3\varepsilon(x) = 2 - x + \frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon(x)$

Exercice 9.

$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} + \frac{t^4}{24} + t^4\varepsilon(t)$ et $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 + x^4\varepsilon(x)$

$$g(x) = 2e^x \times \frac{1}{1+x} = 2\left(1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} + \frac{t^4}{24} + t^4\varepsilon(t)\right)\left(1 - x + x^2 - x^3 + x^4 + x^4\varepsilon(x)\right)$$

On pourra négliger tous les termes en x^5, x^6 … etc

$$g(x) = \left(2 + 2x + x^2 + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{12}\right)(1 - x + x^2 - x^3 + x^4) + x^4\varepsilon(x)$$

$$g(x) = 2 - 2x + 2x^2 - 2x^3 + 2x^4 + 2x - 2x^2 + 2x^3 - 2x^4 + x^2 - x^3 + x^4 + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{3} + \frac{x^4}{12} + x^4\varepsilon(x)$$

$$g(x) = 2 + x^2 - \frac{2x^3}{3} + \frac{9x^4}{12} + x^4\varepsilon(x)$$

Exercice 10.

$$(1+t)^\alpha = 1 + \alpha t + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}t^2 + t^2\varepsilon(t)$$

$\frac{1}{\sqrt{1+t}} = (1+t)^{\frac{-1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}t + \frac{3}{8}t^2 + t^2\varepsilon(t)$ et $\cos t = 1 - \frac{t^2}{2!} + t^2\varepsilon(t)$

donc $f(x) = \cos x \times \frac{1}{\sqrt{1+x}} = \left(1 - \frac{x^2}{2}\right) \times \left(1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2\right) + x^2\varepsilon(x)$

On pourra négliger tous les termes en x^3, x^4 … etc

$$f(x) = \left(1 - \frac{x^2}{2}\right) \times \left(1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2\right) + x^2\varepsilon(x) = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x)$$
$$= 1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + x^2\varepsilon(x)$$

Exercice 11.

$\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + t^4\varepsilon(t)$ et $\sin t = t - \frac{t^3}{6} + t^4\varepsilon(t)$

donc $g(x) = -\sin x \times \ln(1+x) = -\left(x - \frac{x^3}{6}\right)\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right) + x^4\varepsilon(x)$

On pourra négliger tous les termes de degré supérieur ou égaux à 5.

$$g(x) = -x^2 + \frac{x^3}{2} - \frac{x^4}{3} + \frac{x^4}{6} + x^4\varepsilon(x) = -x^2 + \frac{x^3}{2} - \frac{x^4}{6} + x^4\varepsilon(x)$$

Exercice 12. Composée

$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} + t^3\varepsilon(t)$ donc $e^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{6} + x^6\varepsilon(x)$

et donc $f(x) = 1 - e^{x^2} = 1 - 1 - x^2 - \frac{x^4}{2} - \frac{x^6}{6} + x^6\varepsilon(x) = -x^2 - \frac{x^4}{2} - \frac{x^6}{6} + x^6\varepsilon(x)$

On en déduit que la tangente T à la courbe c_f au point d'abscisse 0 a pour équation $y = 0$.

On étudie le signe de $f(x) - 0 = -x^2 + x^2\varepsilon(x)$ pour x proche de 0.

$-x^2 \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad f(x) - 0 \leq 0$ donc la courbe c_f est située au-dessous de sa tangente T.

Exercice 13.

$(1+t)^\alpha = 1+\alpha t+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}t^2+t^2\varepsilon(t)$ et $\sqrt{1+t}=(1+t)^{\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}t+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2}t^2+t^2\varepsilon(t)=1+\frac{1}{2}t-\frac{1}{8}t^2+t^2\varepsilon(t)$

$$f(x)=\sqrt{1+2x^3}=1+\frac{1}{2}2x^3-\frac{1}{8}(2x^3)^2+x^6\varepsilon(x)=1+x^3-\frac{x^6}{2}+x^6\varepsilon(x)$$

On en déduit que la tangente T à la courbe c_f au point d'abscisse 0 a pour équation $y = 1$.
On étudie le signe de $f(x)-1=x^3+x^3\varepsilon(x)$ pour x proche de 0.
Pour $x \le 0 \Leftrightarrow x^3 \le 0$ donc la courbe c_f est située au-dessous de sa tangente T lorsque $x \le 0$.
Pour $x \ge 0 \Leftrightarrow x^3 \ge 0$ donc la courbe c_f est située au-dessus de sa tangente T lorsque $x \ge 0$.

Exercice 14.
$\cos t = 1-\frac{t^2}{2}+\frac{t^4}{4!}-\frac{t^6}{6!}+t^6\varepsilon(t)$ donc $\cos(2x)=1-\frac{(2x)^2}{2}+\frac{(2x)^4}{24}-\frac{(2x)^6}{720}+x^6\varepsilon(x)=1-2x^2+\frac{2x^4}{3}-\frac{4x^6}{45}+x^6\varepsilon(x)$ et donc $f(x)=x\cos(2x)=x\left(1-2x^2+\frac{2x^4}{3}-\frac{4x^6}{45}\right)+x^6\varepsilon(x)=x-2x^3+\frac{2x^5}{3}+x^6\varepsilon(x)$
On en déduit que la tangente T à la courbe c_f au point d'abscisse 0 a pour équation $y = x$.
On étudie le signe de $f(x)-x=-2x^3+x^3\varepsilon(x)$ pour x proche de 0.
Pour $x \le 0 \Leftrightarrow -2x^3 \ge 0$ donc la courbe c_f est située au-dessus de sa tangente T lorsque $x \le 0$.
Pour $x \ge 0 \Leftrightarrow -2x^3 \le 0$ donc la courbe c_f est située au-dessous de sa tangente T lorsque $x \ge 0$.

Exercice 15. Primitive

$$(1+t)^\alpha = 1+\alpha t+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}t^2+t^2\varepsilon(t)$$

$\frac{1}{\sqrt{1+t}}=(1+t)^{\frac{-1}{2}}=1-\frac{t}{2}+\frac{3}{8}t^2+t^2\varepsilon(t)$ donc $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=1+\frac{x^2}{2}+\frac{3}{8}x^4+x^4\varepsilon(x)$

$$\int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt=\int_0^x\left(1+\frac{t^2}{2}+\frac{3}{8}t^4+t^4\varepsilon(t)\right)dt$$

$$[\text{Arcsin}t]_0^x=\left[t+\frac{1}{2}\times\frac{t^3}{3}+\frac{3}{8}\times\frac{t^5}{5}\right]_0^x+x^5\varepsilon(x)$$

$$\text{Arcsin}x-\text{Arcsin}0=x+\frac{1}{2}\times\frac{x^3}{3}+\frac{3}{8}\times\frac{x^5}{5}-0+x^5\varepsilon(x)$$

$$\text{Arcsin}x=x+\frac{x^3}{6}+\frac{3x^5}{40}+x^5\varepsilon(x)$$

On en déduit que la tangente T à la courbe de Arcsin au point d'abscisse 0 a pour équation $y = x$.
On étudie le signe de $\text{Arcsin}x-x=\frac{x^3}{6}+x^3\varepsilon(x)$ pour x proche de 0.
Pour $x \le 0 \Leftrightarrow \frac{x^3}{6}\le 0$ donc la courbe c_f est située au-dessous de sa tangente T lorsque $x \le 0$.
Pour $x \ge 0 \Leftrightarrow \frac{x^3}{6}\ge 0$ donc la courbe c_f est située au-dessus de sa tangente T lorsque $x \ge 0$.

Exercice 16.
$e^t=1+t+\frac{t^2}{2}+t^2\varepsilon(t)$ donc $e^{-t}=1-t+\frac{t^2}{2}+t^2\varepsilon(t)$

$$f(x)=(x+1)^2e^{-x}=(x^2+2x+1)\left(1-x+\frac{x^2}{2}\right)+x^2\varepsilon(x)$$

On pourra négliger tous les termes de degré supérieur ou égal à 2.

$$f(x)=x^2+2x-2x^2+1-x+\frac{x^2}{2}+x^2\varepsilon(x)$$

$$f(x)=1+x-\frac{x^2}{2}+x^2\varepsilon(x)$$

On en déduit que la tangente T à la courbe de f au point d'abscisse 0 a pour équation $y = 1+ x$.
On étudie le signe de $f(x)-(1+x)=-\frac{x^2}{2}+x^2\varepsilon(x)$ pour x proche de 0.

$-\frac{x^2}{2} \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad f(x) - (1 + x) \leq 0$ donc la courbe est située au-dessous de sa tangente T.