I. Equations linéaires du premier ordre:

Une équation différentielle est une équation, dont l'inconnue est une fonction, qui met en relation une fonction et ses dérivées.

Définition.

On appelle **équation différentielle linéaire du premier ordre** sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, une équation de la forme $a(t)y'(t)+b(t)y(t)=u(t)$ où a et b sont des fonctions dérivables sur I avec $a(t)\neq 0$ pour tout $t\in$I et où u est une fonction définie sur I.

L'inconnue est la fonction $y(t)$ et $y'(t)$ est sa dérivée.

L'équation $a(t)y'(t)+b(t)y(t)=0$ est appelée **équation homogène** associée à l'équation $a(t)y'(t)+b(t)y(t)=u(t)$.

Remarque.

Avec la notation différentielle, on obtient $a(t)\frac{dy}{dt}+b(t)y=u(t)$

Théorème. Résolution de l'équation homogène.

L'équation différentielle sur I $a(t)y'(t)+b(t)y(t)=0$ admet pour solution générale l'ensemble des fonctions définies sur I par : $y(t)=ke^{-\mathrm{G}(t)}$ où G désigne une primitive sur I de la fonction $\frac{b}{a}$ et où k est un réel quelconque.

Exemples :

Résoudre l'équation différentielle $ty'(t)+y(t)=0$

$y(t)=ke^{-\mathrm{G}(t)}$ où G(t) est une primitive de $\frac{b(t)}{a(t)}=\frac{1}{t}$ donc $\mathrm{G}(t)=\ln t$ donc :

$y(t)=ke^{-\ln t}=ke^{\ln\frac{1}{t}}=k\times\frac{1}{t}=\frac{k}{t}$ avec $k\in\mathbb{R}$.

Je vérifie $x(t)=\frac{k}{t}$, donc $x'(t)=\frac{-k}{t^2}$ donc $tx'(t)+x(t)=t\times\frac{-k}{t^2}+\frac{k}{t}=\frac{-k}{t}+\frac{k}{t}=0$

Résoudre l'équation différentielle $(t+1)y'(t)+(t-1)y(t)=0$ sur $]-1,+\infty[$.

$y(t)=ke^{-\mathrm{G}(t)}$ où G(t) est une primitive de $\frac{b(t)}{a(t)}=\frac{t-1}{t+1}=\frac{t+1-2}{t+1}=1-\frac{2}{t+1}$

donc $\mathrm{G}(t)=t-2\ln(t+1)$

donc $y(t)=ke^{-t+2\ln(t+1)}=ke^{-t}\times e^{\ln(t+1)^2}=ke^{-t}(t+1)^2$ avec $k\in\mathbb{R}$.

Je vérifie $y(t)=ke^{-t}(t+1)^2$,

donc $y'(t)=-ke^{-t}(t+1)^2+2ke^{-t}(t+1)=ke^{-t}(t+1)(1-t)$

donc $(t+1)y'(t)+(t-1)y(t)=(t+1)\times ke^{-t}(t+1)(1-t)+(t-1)\times ke^{-t}(t+1)^2$

$=ke^{-t}(t+1)^2[1-t+t-1]=0$

Théorème.
Soit l'équation différentielle sur I : $a(t)y'(t) + b(t)y(t) = u(t)$.
La solution générale de cette équation est obtenue en ajoutant une solution particulière (y_p) et la solution générale de l'équation homogène associée (y_0).

Exemple.
Résoudre l'équation différentielle $ty'(t) + y(t) = t$

a) On résout l'équation homogène associée $ty'(t) + y(t) = 0$ donc $y_0(t) = \frac{k}{t}$ avec $k \in \mathbb{R}$.

b) On détermine une solution particulière de $ty'(t) + y(t) = t$

Cherchons une solution affine : $x_p(t) = at + b$ donc $x'_p(t) = a$ et $ta + at + b = t$

$\Leftrightarrow \quad (2a - 1)t + b = 0$

Donc $b = 0$ et $2a - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = \frac{1}{2}$ donc $y_p(t) = \frac{t}{2}$.

c) La solution générale de $tx'(t) + x(t) = t$ est :

$$y(t) = y_p(t) + y_0(t) = \frac{k}{t} + \frac{t}{2} = \frac{2k + t^2}{2t} \text{ avec } k \in \mathbb{R}.$$

Théorème.
Une équation différentielle linéaire (E) du premier ordre a une solution unique vérifiant une condition initiale donnée.

Exemple.
Déterminer la solution de l'équation différentielle $y'(t) - 4y(t) = 2e^{3t}$ telle que :
$y(0) = 1$

a) On résout l'équation homogène associée $y'(t) - 4y(t) = 0$ donc $y_0(t) = ke^{-G(t)}$ avec $k \in \mathbb{R}$ et G une primitive de $\frac{b}{a} = -4$ donc $G(t) = -4t$ soit $y_0(t) = ke^{4t}$.

b) On détermine une solution particulière de $y'(t) - 4y(t) = 2e^{3t}$ par la méthode de la variation de la constante. On cherche une solution particulière de la forme :

$y_p(t) = k(t)e^{4t}$ où $k(t)$ est une fonction de *t*.

$y'_p(t) = k'(t)e^{4t} + 4k(t)e^{4t} = \left(k'(t) + 4k(t)\right)e^{4t}$

Donc $y'_p(t) - 4y_p(t) = 2e^{3t} = \left(k'(t) + 4k(t)\right)e^{4t} - 4k(t)e^{4t} = k'(t)e^{4t}$

donc $k'(t) = 2e^{-t}$ soit $k(t) = -2e^{-t}$.

On en déduit que $y_p(t) = -2e^{-t} \times e^{4t} = -2e^{3t}$

c) La solution générale de $y'^{(t)} - 4y(t) = 2e^{3t}$ est $y(t) = y_p(t) + y_0(t)$

donc $y(t) = -2e^{3t} + ke^{4t}$ avec $k \in \mathbb{R}$.

d) Puisque $y(0) = 1$, $y(0) = -2 \times 1 + k \times 1 = -2 + k = 1$, on en déduit que $k = 3$.

La solution est donc : $y(t) = -2e^{3t} + 3e^{4t}$.

II. Equations linéaires du second ordre à coefficients constants :

Extension des résolutions d'équations du second degré.

Définitions.

← On appelle **équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants** sur un intervalle I de ℝ, une équation de la forme $ay''(t)+by'(t)+cy(t)=d(t)$ où a, b et c sont des constantes réelles données avec $a \neq 0$ et d une fonction donnée, dérivable sur I.

L'inconnue est la fonction $y(t)$, $y'(t)$ est sa dérivée et $y''(t)$ sa dérivée seconde.

↑ L'équation $ay''(t)+by'(t)+cy(t)=0$ est appelée **équation homogène** associée.

→ On appelle **équation caractéristique** de l'équation différentielle : $ar^2+br+c=0$ d'inconnue r.

Théorème. Résolution de l'équation homogène.

Soit l'équation différentielle $ay''(t)+by'(t)+cy(t)=0$, son équation caractéristique associée $ar^2+br+c=0$ et Δ son discriminant.

- Si $\Delta>0$ alors l'équation caractéristique possède deux racines r_1 et r_2 réelles et distinctes. La solution générale de l'ED est alors $f(t)=\lambda e^{r_1 t}+\mu e^{r_2 t}$ où λ et μ sont deux constantes.
- Si $\Delta=0$ alors l'équation caractéristique possède une racine double r réelle. La solution générale de l'ED est alors $f(t)=(\lambda t+\mu)e^{rt}$ où λ et μ sont deux constantes.
- Si $\Delta<0$ alors l'équation caractéristique possède deux racines complexes conjuguées $r_1=\alpha+i\beta$ et $r_2=\alpha-i\beta$.
  La solution générale de l'ED est alors $f(t)=\big(\lambda\cos(\beta t)+\mu\sin(\beta t)\big)e^{\alpha t}$ où λ et μ sont deux constantes.

Exemples.

▶1. Résoudre $y''(t)-4y'(t)+3y(t)=0$.

L'équation caractéristique est $r^2-4r+3=0$.

Le discriminant est $\Delta=(-4)^2-4\times 3=16-12=4>0$.

L'équation possède donc deux racines réelles et distinctes : $r_1=\frac{4-2}{2}=1$ et $r_2=\frac{4+2}{2}=3$.

La solution générale de l'ED est alors $f(t)=\lambda e^{t}+\mu e^{3t}$ où $\lambda\in\mathbb{R}$ et $\mu\in\mathbb{R}$.

▶2. Résoudre $y''(t)-4y'(t)+4y(t)=0$.

L'équation caractéristique est $r^2-4r+4=0$. Le discriminant est $\Delta=(-4)^2-4\times 4=16-16=0$.

L'équation possède donc une racine réelle double : $r=\frac{4}{2}=2$.

La solution générale de l'ED est alors $f(t) = (\lambda t + \mu)e^{2t}$ où $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\mu \in \mathbb{R}$.

►3. Résoudre $y''(t) - 2y'(t) + 5y(t) = 0$.

L'équation caractéristique est $r^2 - 2r + 5 = 0$. Le discriminant est :

$\Delta = (-2)^2 - 4 \times 5 = 4 - 20 = -16$.

L'équation possède donc deux racines complexes conjuguées :

$r_1 = \frac{2+4i}{2} = 1 + 2i$ et $r_2 = 1 - 2i$.

La solution générale de l'ED est alors $f(t) = \big(\lambda\cos(2t) + \mu\sin(2t)\big)e^{t}$ où $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\mu \in \mathbb{R}$.

Théorème.

← La solution générale d'une équation avec second membre est obtenue en ajoutant une solution particulière (y_p) et la solution générale de l'équation homogène associée (y_0).

↑ Une équation différentielle linéaire du second ordre $ay'' + by' + cy = d(t)$ a une solution unique vérifiant une condition initiale donnée du type $y(t_0) = y_0$ et $y'(t_1) = y_1$.