BTS Maintenance industrielle - gaelle.buffet@ac-montpellier.fr

Equations différentielles - Correction

Exercice 1.
1. Résoudre l'ED $y' = 2y$.
2. Déterminer la solution de $y' = 3y$ telle que $y(0) = 1$.

Exercice 2.
1. Résoudre l'ED $y'' + 4y = 0$.
2. Déterminer la solution de $y'' + 4y = 0$ telle que $y(\pi) = 3$ et $y'(\pi) = 2$.

Exercice 3.
1. Résoudre l'équation différentielle (E_0) : $y'(x) + 2y(x) = 0$.
2. Soit l'équation différentielle (E) : $y'(x) + 2y(x) = x$.
 a) Déterminer a et b pour que la fonction affine $g(x) = ax + b$ définie sur P soit solution particulière de l'équation (E).
 b) En déduire toutes les solutions de (E).
 c) Déterminer la solution de (E) telle que $y(0) = 1$.

Exercice 4.
Soit l'équation différentielle (E) :
$y' - y = x^2 - x - 1$ dans laquelle *y* est une fonction de la variable *x*, dérivable sur P.
1. Résoudre dans P, l'équation différentielle homogène associée à (E).
2 *a*) Démontrer que la fonction $g(x) = -x^2 - x$ définie sur P est solution de (E).
 b) En déduire les solutions de (E).
3. Déterminer la solution *f* de (E) qui vérifie la condition initiale $f(0) = 1$.

Exercice 5.
Soit l'équation différentielle (E) :
$$y' + xy = x^2e^{-x}$$
1. Résoudre dans P, l'équation différentielle homogène associée à (E).
2 *a*) Déterminer a et b tels que la fonction $h(x) = (ax + b)e^{-x}$ définie sur P soit solution particulière de l'équation (E).
 b) En déduire la solution générale de l'équation (E).
3. Déterminer la solution *f* de (E) qui vérifie la condition initiale $f(0) = 1$.

Exercice 6.
Soit l'équation différentielle (E) :
$$y' + y = \frac{1}{1 + e^x}$$
1. Résoudre dans P, l'équation différentielle homogène associée à (E).
2. Déterminer une fonction k, définie et dérivable sur P, telle que, pour tout *x* de P, la fonction $h(x) = k(x)e^{-x}$ soit solution particulière de l'équation (E).
3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).
4. Déterminer la solution *f* de (E) qui vérifie la condition initiale $f(0) = 1 + \ln 2$.

Exercice 7.
Soit l'équation différentielle (E) :
$$y'' + 2y' + y = 4e^{-x}$$
1. Résoudre dans P, l'équation différentielle homogène associée à (E).
2. Démontrer que la fonction $g(x) = 2x^2e^{-x}$, définie sur P est une solution de (E).
3. En déduire les solutions sur P de (E).
4. Déterminer la solution *f* de (E) qui vérifie $f(0) = 4$ et $f'(0) = 1$.

Exercice 8.
Soit l'équation différentielle (E) :
$$y'' - 3y' + 2y = 8x^2 - 24x$$
1. Résoudre dans P, l'équation différentielle homogène associée à (E).
2. Déterminer *a*, *b* et *c* tels que la fonction $g(x) = ax^2 + bx + c$ définie sur P soit solution particulière de l'équation (E).
3. En déduire l'ensemble des solutions de (E).
4. Déterminer la solution *f* de (E) qui vérifie $f(0) = 0$ et $f'(0) = 0$.

BTS Maintenance industrielle - gaelle.buffet@ac-montpellier.fr

Equations différentielles - Correction

Exercice 1.

1. Résoudre l'ED $y' = 2y$.
2. Déterminer la solution de $y' = 3y$ telle que $y(0) = 1$.

Exercice 2.

1. Résoudre l'ED $y'' + 4y = 0$.
2. Déterminer la solution de $y'' + 4y = 0$ telle que $y(\pi) = 3$ et $y'(\pi) = 2$.

Exercice 3.

1. Résoudre l'équation différentielle (E_0) : $y'(x) + 2y(x) = 0$.
2. Soit l'équation différentielle (E) : $y'(x) + 2y(x) = x$.
   a) Déterminer a et b pour que la fonction affine $g(x) = ax + b$ définie sur P soit solution particulière de l'équation (E).
   b) En déduire toutes les solutions de (E).
   c) Déterminer la solution de (E) telle que $y(0) = 1$.

Exercice 4.

Soit l'équation différentielle (E) :
$y' - y = x^2 - x - 1$ dans laquelle *y* est une fonction de la variable *x*, dérivable sur P.

1. Résoudre dans P, l'équation différentielle homogène associée à (E).
2. *a*) Démontrer que la fonction $g(x) = -x^2 - x$ définie sur P est solution de (E).
   b) En déduire les solutions de (E).
3. Déterminer la solution *f* de (E) qui vérifie la condition initiale $f(0) = 1$.

Exercice 5.

Soit l'équation différentielle (E) :

$$y' + xy = x^2 e^{-x}$$

1. Résoudre dans P, l'équation différentielle homogène associée à (E).
2. *a*) Déterminer a et b tels que la fonction $h(x) = (ax + b)e^{-x}$ définie sur P soit solution particulière de l'équation (E).
   b) En déduire la solution générale de l'équation (E).
3. Déterminer la solution *f* de (E) qui vérifie la condition initiale $f(0) = 1$.

Exercice 6.

Soit l'équation différentielle (E) :

$$y' + y = \frac{1}{1 + e^x}$$

1. Résoudre dans P, l'équation différentielle homogène associée à (E).
2. Déterminer une fonction k, définie et dérivable sur P, telle que, pour tout *x* de P, la fonction $h(x) = k(x)e^{-x}$ soit solution particulière de l'équation (E).
3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).
4. Déterminer la solution *f* de (E) qui vérifie la condition initiale $f(0) = 1 + \ln 2$.

Exercice 7.

Soit l'équation différentielle (E) :

$$y'' + 2y' + y = 4e^{-x}$$

1. Résoudre dans P, l'équation différentielle homogène associée à (E).
2. Démontrer que la fonction $g(x) = 2x^2 e^{-x}$, définie sur P est une solution de (E).
3. En déduire les solutions sur P de (E).
4. Déterminer la solution *f* de (E) qui vérifie $f(0) = 4$ et $f'(0) = 1$.

Exercice 8.

Soit l'équation différentielle (E) :

$$y'' - 3y' + 2y = 8x^2 - 24x$$

1. Résoudre dans P, l'équation différentielle homogène associée à (E).
2. Déterminer *a*, *b* et *c* tels que la fonction $g(x) = ax^2 + bx + c$ définie sur P soit solution particulière de l'équation (E).
3. En déduire l'ensemble des solutions de (E).
4. Déterminer la solution *f* de (E) qui vérifie $f(0) = 0$ et $f'(0) = 0$.