

Chap 5. Les matrices

I. Les matrices

Exemple.

Trois ateliers A_1 , A_2 et A_3 fabriquent deux types d'appareil P_1 et P_2 .

Pour une période donnée, la fabrication est la suivante :

- L'atelier A_1 fabrique 2 appareils de type P_1 et 3 appareils de type P_2 .
- L'atelier A_2 fabrique 2 appareils de type P_1 et 4 appareils de type P_2 .
- L'atelier A_3 fabrique 4 appareils de type P_1 et 3 appareils de type P_2 .

Par facilité, nous représentons cette situation par la matrice suivante $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

La matrice A donne la production par type d'appareil et par atelier. C'est une matrice à 2 lignes et 3 colonnes.

Définition.

Soit n et p deux nombres entiers naturels non nuls.

On appelle **matrice** un tableau de nombres réels répartis en n lignes et p colonnes.

Soit une matrice à n lignes et p colonnes : $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{ip} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{np} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$

Exemple.

Soit $M = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 0 \\ -1 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$, $a_{11} = 2$ $a_{23} = -3$ $a_{32} = 0$ $a_{33} = 5$, M est une **matrice carrée**.

II. Produit par un réel

Les appareils de type P_1 et P_2 fabriqués dans les ateliers A_1 , A_2 et A_3 sont vendus 50 000 € pièce. On peut donc construire une nouvelle matrice donnant le chiffre d'affaire potentiel par type d'appareil et par

atelier, en milliers d'euros : $B = 50A = \begin{pmatrix} 2 \times 50 & 2 \times 50 & 4 \times 50 \\ 3 \times 50 & 4 \times 50 & 3 \times 50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 & 100 & 200 \\ 150 & 200 & 150 \end{pmatrix}$.

Définition. Produit d'une matrice par un réel.

Soit $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ une matrice à n lignes et p colonnes et λ un nombre réel.

Le produit de λ par A est la matrice $C = \lambda A = (\lambda \times a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ où chaque élément de A est multiplié par λ .

III. Somme de deux matrices

Pour deux périodes différentes, la production par type d'appareil et par atelier est : $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ et

$A' = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 6 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$. Alors le bilan global de la fabrication pour ces deux périodes est représenté par la

matrice $M = A + A' = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 5 & 6 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 10 \\ 7 & 7 & 5 \end{pmatrix}$.

Définition. Somme de deux matrices.

Soit $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ et $B = (b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ deux matrices à n lignes et p colonnes.

Chap 5. Les matrices

La somme des matrices A et B est la matrice $C = A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ où l'on ajoute les éléments de A avec ceux de B qui sont sur la même ligne et la même colonne.

IV. Produit de deux matrices

Une entreprise fabrique deux types d'appareil X et Y. Pour la fabrication de chacun d'entre eux, elle utilise deux composants C1 et C2.

- Pour fabriquer l'appareil X, il faut 2 composants C₁ et 6 composants C₂.
- Pour fabriquer l'appareil Y, il faut 3 composants C₁ et 5 composants C₂.

La matrice $\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ représente les besoins par appareil et par composant.

Pour l'achat des composants C₁ et C₂, l'entreprise a deux fournisseurs F₁ et F₂.

- Le fournisseur F₁ facture 700 € le composant C₁ et 400 € le composant C₂.
- Le fournisseur F₂ facture 500 € le composant C₁ et 600 € le composant C₂.

La matrice $\begin{pmatrix} 700 & 500 \\ 400 & 600 \end{pmatrix}$ représente les prix par composant et par fournisseur.

Coût avec le fournisseur F₁ :

- Le prix d'un appareil X est $2 \times 700 + 6 \times 400 = 3800$ €.
- Le prix d'un appareil Y est $3 \times 700 + 5 \times 400 = 4100$ €.

Coût avec le fournisseur F₂ :

- Le prix d'un appareil X est $2 \times 500 + 6 \times 600 = 4600$ €.
- Le prix d'un appareil Y est $3 \times 500 + 5 \times 600 = 4500$ €.

On écrit que $\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 700 & 500 \\ 400 & 600 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4100 & 4600 \\ 3800 & 4500 \end{pmatrix}$, la matrice produit donne le coût prix de revient par appareil selon le fournisseur choisi.

Définition. Produit de deux matrices.

Soit $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ une matrice à n lignes et p colonnes et $B = (b_{jk})_{\substack{1 \leq j \leq p \\ 1 \leq k \leq q}}$ deux matrices à p lignes et q colonnes.

Le produit des matrices A et B est la matrice $C = A \times B = (c_{ik})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq k \leq q}}$ à n lignes et q colonnes telle que :

$$c_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \dots + a_{ip}b_{pk}.$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ip} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{np} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1k} & \dots & b_{1q} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{p1} & \dots & b_{pk} & \dots & b_{pq} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1k} & \dots & c_{1q} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & \dots & c_{ik} & \dots & c_{iq} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \dots & c_{nk} & \dots & c_{nq} \end{pmatrix}$$

Exemple.

$$\begin{pmatrix} 2 & 8 & 3 \\ 5 & -2 & 6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 7 & -1 \\ 1 & 0 \\ 9 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \times 2 + 1 \times 8 + 3 \times 9 & -1 \times 2 + 8 \times 0 + 3 \times 4 \\ 7 \times 5 - 2 \times 1 + 6 \times 9 & -1 \times 5 - 2 \times 0 + 6 \times 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 49 & 10 \\ 87 & 19 \end{pmatrix}$$