Devoir surveillé :
Équations différentielles (sujet A)

Exercice 1

Soit (E) l'équation différentielle $(1+x^2)y' - 2xy = x^2 + 8x - 1$

1) Donner l'équation homogène associée (E_h)
2) Après avoir dit ce que valent $a(x)$, $b(x)$ et $g(x)$ prouver que $G(x) = -\ln(1+x^2)$
3) En déduire les solutions de l'équation homogène
4) Trouver m et p tels que $f_p(x) = mx + p$ soit une solution particulière de (E)
5) En déduire les solutions de (E)
6) Donner f la solution de E telle que $f(0) = 6$

Exercice 2

Résoudre : $r^2 - 4r + 13 = 0$ dans l'ensemble des nombres complexes.

Exercice 3

Soit (E) l'équation différentielle $y'' + 5y' + 6y = 12x + 4$

1) Donner l'équation homogène associée (E_h)
2) Donner l'équation caractéristique associée (E_c)
3) Résoudre l'équation caractéristique associée
4) En déduire les solutions que les solutions de l'équation homogène sont de la forme $y_h = \lambda e^{-2x} + \mu e^{-3x}$
5) Prouver que $f_p(x) = 2x - 1$ est solution particulière de (E) en utilisant la méthode du cours ou en cherchant m et p tels que $g(x) = mx + p$ soit une solution particulière de (E)
6) En déduire les solutions de (E)

www.dimension-k.com

Devoir surveillé :
Équations différentielles (sujet B)

Exercice 1

Soit (E) l'équation différentielle $(2+x^2)y' - 2xy = x^2 + 6x - 2$

1) Donner l'équation homogène associée (E_h)
2) Après avoir dit ce que valent $a(x)$, $b(x)$ et $g(x)$ prouver que $G(x) = -\ln(2+x^2)$
3) En déduire les solutions de l'équation homogène
4) Trouver m et p tels que $f_p(x) = mx + p$ soit une solution particulière de (E)
5) En déduire les solutions de (E)
6) Donner f la solution de E telle que $f(0) = 8$

Exercice 2

Résoudre : $r^2 - 9r + 13 = 0$ dans l'ensemble des nombres complexes.

Exercice 3

Soit (E) l'équation différentielle $y'' + y' - 6y = 6x - 7$

1) Donner l'équation homogène associée (E_h)
2) Donner l'équation caractéristique associée (E_c)
3) Résoudre l'équation caractéristique associée
4) En déduire les solutions que les solutions de l'équation homogène sont de la forme $y_h = \lambda e^{2x} + \mu e^{-3x}$
5) Prouver que $f_p(x) = -x + 1$ est solution particulière de (E) en utilisant la méthode du cours ou en cherchant m et p tels que $g(x) = mx + p$ soit une solution particulière de (E)
6) En déduire les solutions de (E)

Correction du DS Équations différentielles (sujet A)

Exercice 1 Soit (E) l'équation différentielle $(1+x^2)y' - 2xy = x^2 + 8x - 1$

1) $(1+x^2)y' - 2xy = 0\ (E_h)$
2) $a(x) = 1 + x^2$, $b(x) = -2x$ et $g(x) = \frac{-2x}{1+x^2}$ on reconnait $\frac{u'}{u} \to \ln(u)$ avec $u = 1 + x^2$ qui est bien strictement positive et $u' = 2x$ on a bien $G(x) = -\ln(1+x^2)$
3) $f_h(x) = ke^{-G(x)} = ke^{\ln(1+x^2)} = k(1+x^2)$
4) Si $f_p(x) = mx + p$ alors $f_p'(x) = m$ on aura f_p solution particulière de $(E) \Leftrightarrow (1+x^2)f_p' - 2xf_p = x^2 + 8x - 1$
   $\Leftrightarrow (1+x^2)m - 2x(mx+p) = x^2 + 8x - 1$
   $\Leftrightarrow -x^2m - 2px + m = x^2 + 8x - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} -m = 1 \\ -2p = 8 \\ m = -1 \end{cases} \Leftrightarrow f_p(x) = -x - 4$
5) les solutions de (E) sont de la forme : $y = -x - 4 + k(1+x^2)$
6) $f(0) = 6 \Leftrightarrow -0 - 4 + k(1+0^2) = 6 \Leftrightarrow k = 10$ donc $f(x) = -x - 4 + 10(1+x^2)$

Exercice 2 $r^2 - 4r + 13 = 0$ donc $\Delta = 16 - 4 \times 1 \times 13 = -36$

$r_1 = \frac{4 - i\sqrt{36}}{2} = 2 - i3$ et $r_2 = \frac{4 + i\sqrt{36}}{2} = 2 + i3$

Exercice 3 Soit (E) l'équation différentielle $y'' + 5y' + 6y = 12x + 4$

1) $y'' + 5y' + 6y = 0\ (E_h)$
2) $r^2 + 5r + 6 = 0\ (E_c)$
3) $\Delta = 5^2 - 4 \times 1 \times 6 = 1$ $\quad r_1 = \frac{-5-\sqrt{1}}{2} = -3$ et $r_2 = \frac{(-5+\sqrt{1})}{2} = -2$
4) Comme $\Delta > 0$ $y_h = \lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x} = \lambda e^{-2x} + \mu e^{-3x}$
5) Si $f_p(x) = 2x - 1$ alors $f_p'(x) = 2$ et $f_p''(x) = 0$, donc $f_p'' + 5f_p' + 6f_p = 5 \times 2 + 6(2x-1) = 12x + 4$ donc f_p est bien solution particulière de (E)
6) Les solutions de (E) seront de la forme $y = 2x - 1 + \lambda e^{-2x} + \mu e^{-3x}$

Correction du DS Équations différentielles (sujet B)

Exercice 1 Soit (E) l'équation différentielle $(2+x^2)y' - 2xy = x^2 + 6x - 2$

1) $(2+x^2)y' - 2xy = 0\ (E_h)$
2) $a(x) = 2 + x^2$, $b(x) = -2x$ et $g(x) = \frac{-2x}{2+x^2}$ on reconnait $\frac{u'}{u} \to \ln(u)$ avec $u = 2 + x^2$ qui est bien strictement positive et $u' = 2x$ on a bien $G(x) = -\ln(2+x^2)$
3) $f_h(x) = ke^{-G(x)} = ke^{\ln(2+x^2)} = k(2+x^2)$
4) Si $f_p(x) = mx + p$ alors $f_p'(x) = m$ on aura f_p solution particulière de $(E) \Leftrightarrow (2+x^2)g' - 2xg = x^2 + 6x - 2$
   $\Leftrightarrow (2+x^2)m - 2x(mx+p) = x^2 + 6x - 2$
   $\Leftrightarrow -x^2m - 2px + 2m = x^2 + 6x - 2 \Leftrightarrow \begin{cases} -m = 1 \\ -2p = 6 \\ 2m = -2 \end{cases} \Leftrightarrow f_p(x) = -x - 3$
5) les solutions de (E) sont de la forme : $y = -x - 3 + k(2+x^2)$
6) $f(0) = 8 \Leftrightarrow -0 - 3 + k(2+0^2) = 8 \Leftrightarrow k = \frac{11}{2}$ donc $f(x) = -x - 3 + 5{,}5(2+x^2)$

Exercice 2 $r^2 - 9r + 13 = 0$ donc $\Delta = 81 - 4 \times 1 \times 13 = 29$

$r_1 = \frac{9-\sqrt{29}}{2}$ et $r_2 = \frac{9+\sqrt{29}}{2}$

Exercice 3

Soit (E) l'équation différentielle $y'' + y' - 6y = 6x - 7$

1) $y'' + y' - 6y = 0\ (E_h)$
2) $r^2 + r - 6 = 0\ \ (E_c)$
3) $\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times (-6) = 25$ $\quad r_1 = \frac{-1-\sqrt{25}}{2} = -3$ et $r_2 = \frac{(-1+\sqrt{25})}{2} = 2$
4) Comme $\Delta > 0$ $y_h = \lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x} = \lambda e^{2x} + \mu e^{-3x}$
5) Si $f_p(x) = -x + 1$ alors $f_p'(x) = -1$ et $f_p''(x) = 0$, donc $f_p'' + f_p' - 6f_p = 1 \times (-1) - 6(-x+1) = 6x - 7$ donc f_p est bien solution particulière de (E)
6) Les solutions de (E) seront de la forme $y = -x + 1 + \lambda e^{2x} + \mu e^{-3x}$