Devoir surveillé : Primitives et intégrales (Sujet A)

Exercice 1

Déterminer les primitives des fonctions

a) f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = (7\,t - 5)^2$

b) f définie sur $]1; +\infty[$ par $f(x) = \frac{-4}{x-1}$

c) f définie sur$[1; +\infty[$ par $f(t) = \frac{3}{(1-2t)^2}$

d) f définie sur $\mathbb{R}$ par f(t) = cos t $\sin^2$ t.

Exercice 2

La tension au bornes d'un dipole entre les instants $t = 0$ et $t = 10$ est donnée par : $f(t) = -t^2 - 10t + 11$, donner $\int_0^{10} f(t)dt$ en déduire la tension moyenne aux bornes de ce dipole entre les instants $t = 0$ et $t = 10$

Exercice 3

Soit f la fonction définie pour tout $x > 0$ par $f(x) = \ln(x)$. Les deux parties sont indépendantes.

Partie A

Le but de cette partie est de déterminer une approximation de $\mathcal{A}$l'aire comprise entre l'axe des abscisses, C la courbe représentative de f et les droites verticales coupant l'axe des abscisses en $x = 1$ et $x = e^1$

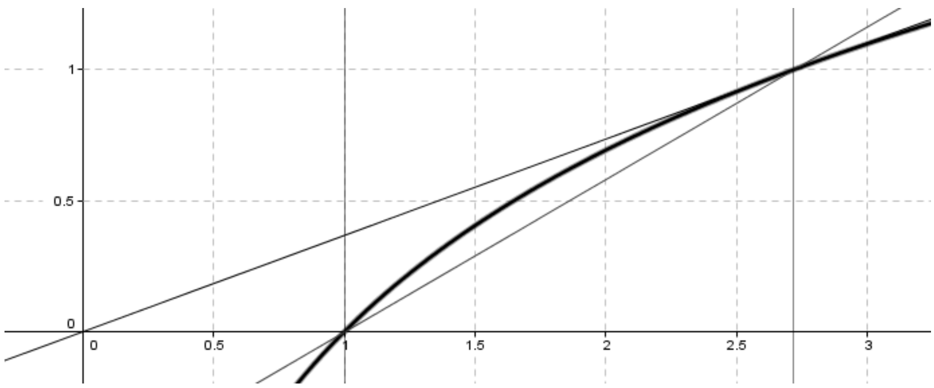
1) Déterminer $f(e)$, la dérivée de f notée f' ainsi que $f'(e)$
2) En déduire l'équation de la tangente à $\mathcal{C}$ en $x = e$ (la réponse est $= \frac{1}{e}x$, donc ce qu'on attends de votre part c'est une rédaction détaillée)

On s'intéresse maintenant à la droite passant par les points d'intersection entre$\mathcal{C}$ et les deux verticales, notés respectivement A et B.

3) Placez ces points puis déterminer les coordonnées de ces deux points d'intersection puis prouvez que cette droite a pour équation $y = \frac{1}{e-1}x - \frac{1}{e-1}$

On admet qu'entre $x = 1$ et $x = e^1$ la courbe représentative de$f$ est toujours sous la tangente et aussi toujours au-dessus de (AB).

4) A quoi correspondent$\int_1^e \frac{1}{e}x dx$, et $\int_1^e \left(\frac{1}{e-1}x - \frac{1}{e-1}\right) dx$?
5) Déterminer en encadrement de $\mathcal{A}$



Partie B

Un élève ayant une calculatrice très chère, mais ne savant pas très bien s'en servir essaye d'utiliser la commande primitive de sa machine, et elle semble lui affirmer que LA primitive de $f(x) = \ln(x)$ est $F(x) = x ln(x) - x$.

1) Dériver F, que pouvez-vous en déduire sur ce que l'élève pense avoir compris ?
2) Si l'on suppose qu'il a tout bien compris que vaut : $\mathcal{A} = \int_1^e \ln(x)\,dx$
3) Qu'en pensez-vous ?

Devoir surveillé : Primitives et intégrales (Sujet B)

Exercice 1

a) f définie sur $\mathbb{R}$ par f (x) = 2 (3 x – 2)^3

b) f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = sin\, x \cos^3 x$

c) f définie sur $]-\infty; \frac{1}{2}[$ par : $f(t) = -\frac{4}{2t-1}$

d) f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{x}{(3x^2+1)^2}$

Exercice 2

La tension au bornes d'un dipole entre les instants $t = 0$ et $t = 10$ est donnée par :
$f(t) = -t^2 - 10t + 11$, donner $\int_0^{10} f(t)dt$ en déduire la tension moyenne aux bornes de ce dipole entre les instants $t = 0$ et $t = 10$

Exercice 3

Soit f la fonction définie pour tout $x > 0$ par $f(x) = \ln(x)$. Les deux parties sont indépendantes.

Partie A

Le but de cette partie est de déterminer une approximation de $\mathcal{A}$l'aire comprise entre l'axe des abscisses, C la courbe représentative de f et les droites verticales coupant l'axe des abscisses en $x = 1$ et $x = e^1$

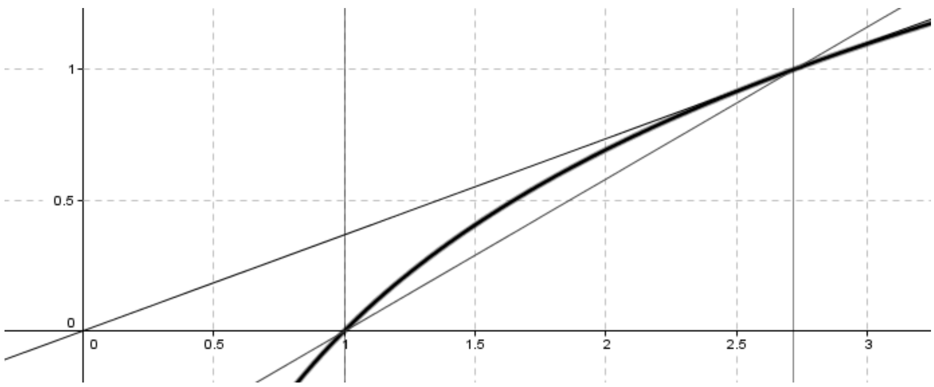
1) Déterminer $f(e)$, la dérivée de f notée f' ainsi que $f'(e)$
2) En déduire l'équation de la tangente à $\mathcal{C}$ en $x = e$ (la réponse est $= \frac{1}{e}x$, donc ce qu'on attends de votre part c'est une rédaction détaillée)

On s'intéresse maintenant à la droite passant par les points d'intersection entre$\mathcal{C}$ et les deux verticales, notés respectivement A et B.

3) Placez ces points puis déterminer les coordonnées de ces deux points d'intersection puis prouvez que cette droite a pour équation $y = \frac{1}{e-1}x - \frac{1}{e-1}$

On admet qu'entre $x = 1$ et $x = e^1$ la courbe représentative de$f$ est toujours sous la tangente et aussi toujours au-dessus de (AB).

4) A quoi correspondent$\int_1^e \frac{1}{e}xdx$, et $\int_1^e \left(\frac{1}{e-1}x - \frac{1}{e-1}\right) dx$?
5) Déterminer en encadrement de $\mathcal{A}$



Partie B

Un élève ayant une calculatrice très chère, mais ne savant pas très bien s'en servir essaye d'utiliser la commande primitive de sa machine, et elle semble lui affirmer que LA primitive de $f(x) = \ln(x)$ est $F(x) = xln(x) - x$.

1) Dériver F, que pouvez-vous en déduire sur ce que l'élève pense avoir compris ?
2) Si l'on suppose qu'il a tout bien compris que vaut : $\mathcal{A} = \int_1^e \ln(x)\, dx$
3) Qu'en pensez-vous ?