Correction Devoir surveillé : Primitives et intégrales

Exercice 1 (sujet A) Déterminer les primitives des fonctions

a) $f(t) = (7\,t - 5)^2 = \frac{1}{7} \times 7(7\,t - 5)^2$

$F(t) = \frac{1}{7}\frac{(7\,t-5)^3}{3} + c = \frac{(7\,t-5)^3}{21} + c$

b) f définie sur $]1; +\infty[$ par $f(x) = \frac{-4}{x-1} = -4\frac{1}{x-1}$

$F(x) = -4\ln(x-1) + c$

c) f définie sur$[1; +\infty[$ par $f(t) = \frac{3}{(1-2t)^2} = \frac{3}{-2}\frac{-2}{(1-2t)^2}$

$F(t) = \frac{3}{-2}\frac{-1}{1(1-2t)^1} + c = \frac{3}{2(1-2t)} + c$

d) f définie sur $\mathbb{R}$ par f(t) = cos t sin^2 t.

$F(t) = \frac{\sin^3 t}{3} + c$

Exercice 1 (sujet B)

a) f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2(3\,x - 2)^3 = \frac{2}{3}3(3\,x - 2)^3$

$F(x) = \frac{2}{3}\frac{(3\,x-2)^4}{4} + c = \frac{(3\,x-2)^4}{6} + c$

b) $f(x) = sin\,x\cos^3 x = (-1)(-\sin x)\cos^3 x$

$F(x) = -\frac{\cos^4 x}{4} + c$

c) f définie sur $]-\infty; \frac{1}{2}[$ par : $f(t) = -\frac{4}{2t-1} = -2\frac{2}{2t-1}$

$F(t) = -2\ln(-(2t-1)) = -2\ln(1-2t)$

d) $f(x) = \frac{x}{(3x^2+1)^2} = \frac{1}{6}\frac{6x}{(3x^2+1)^2}$

$F(x) = \frac{1}{6}\frac{-1}{1(3x^2+1)^1} = \frac{-1}{6(3x^2+1)}$

Exercice 2

La tension au bornes d'un dipôle entre $t = 0$ et $t = 10$ est donnée par : $f(t) = -t^2 - 10t + 11$,

$\int_0^{10} f(t)dt = \left[-\frac{t^3}{3} - \frac{10t^2}{2} + 11t\right]_0^{10} = \left(-\frac{10^3}{3} - \frac{10\times10^2}{2} + 11\times10\right) - \left(-\frac{0^3}{3} - \frac{10\times0^2}{2} + 11\times0\right)$

$= \frac{-2000-3000+660}{6} - 0 = -\frac{4340}{6}$

La tension moyenne sera $f_{moy} = \frac{1}{10-0}\int_0^{10} f(t)dt = \frac{1}{10}\left(-\frac{4340}{6}\right) = -\frac{434}{6}$

Exercice 3 **Partie A**

1) $f(e) = \ln(e) = 1$, $f'(x) = \frac{1}{x}$ ainsi que $f'(e) = \frac{1}{e}$
2) En déduire l'équation de la tangente à $\mathcal{C}$ en $x = e$ sera $y = f'(e)(x-e) + f(e)$
   $\Leftrightarrow y = \frac{1}{e}(x-e) + 1 \Leftrightarrow y = \frac{x}{e} - 1 + 1 \Leftrightarrow y = \frac{x}{e}$
3) Pour $x = 1$ $f(1) = \ln(1) = 0$ et Pour $x = e$ $f(e) = \ln(e) = 1$
   $m = \frac{(1-0)}{(e-1)} = \frac{1}{e-1}$ formule générale : $y = m(x-a) + f(a)$, en prenant $a = 1$ on a :
   $y = \frac{1}{e-1}(x-1) \Leftrightarrow y = \frac{1}{e-1}x - \frac{1}{e-1}$
4) $\int_1^e \frac{1}{e}x dx$, et $\int_1^e \left(\frac{1}{e-1}x - \frac{1}{e-1}\right)dx$ correspondent aux aires comprises entre l'axe des abscisses, les droites verticales $x = 1$ et $x = e$ et respectivement la tangente et la droite étudiée à la question 3
5) $\int_1^e \frac{1}{e}x dx = \left[\frac{1}{e}\frac{x^2}{2}\right]_1^e = \frac{e^2}{2e} - \frac{1}{2e} = \frac{e}{2} - \frac{1}{2e}$,
   $\int_1^e \left(\frac{1}{e-1}x - \frac{1}{e-1}\right)dx = \left[\frac{1}{e-1}\frac{x^2}{2} - \frac{x}{e-1}\right]_1^e = \frac{1}{e-1}\frac{e^2}{2} - \frac{e}{e-1} - \left(\frac{1}{e-1}\frac{1^2}{2} - \frac{1}{e-1}\right) \approx 1{,}175$
   $$= \frac{1}{e-1}\left(\frac{e^2}{2} - e - \frac{1}{2} + 1\right) = \frac{1}{e-1}\left(\frac{e^2 - 2e + 1}{2}\right) = \frac{e^2 - 2e + 1}{2(e-1)} \approx 0{,}859$$
   D'après la position de la courbe : $\int_1^e \left(\frac{1}{e-1}x - \frac{1}{e-1}\right)dx \le \mathcal{A} \le \int_1^e \frac{1}{e}x dx$ donc $\mathcal{A}$ sera comprise entre 0,85 et 1,18

Partie B

1) $F'(x) = x\frac{1}{x} + 1ln(x) - 1 = \ln x = f(x)$ donc F est UNE primitive de f (et non pas LA)
2) $\mathcal{A} = \int_1^e \ln(x)\,dx = [xln(x) - x]_1^e = e\ln(e) - e - (1\ln(1) - 1) = e - e - 0 + 1 = 1$
3) C'est compatible avec la fin de la partie A